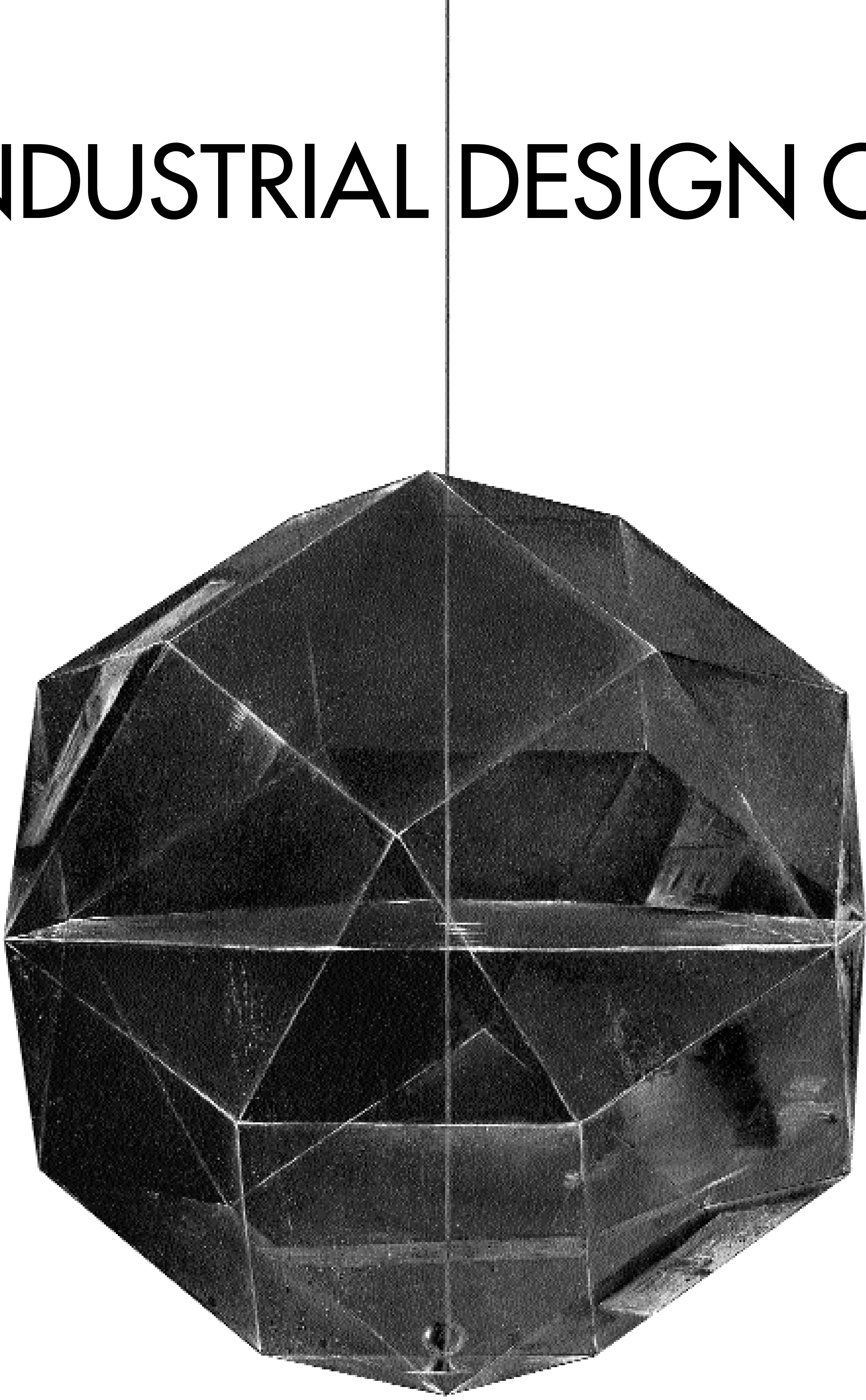
INDUSTRIAL DESIGN 06



Das Viertbüchlein,

INDUSTRIAL DESIGN 06

Prof. Lambert Rosenbusch
Architekt BDB DWB
Hochschule für bildende
Künste Hamburg

Die Deutsche Bibliothek, CIP-Einheitsaufnahme / hrsg. v. Lambert Rosenbusch
Industrial Design 06 / DAS VIERTBÜCHLEIN / ISBN 3-935749-69-4

Druck: St. Pauli Druckerei, Hamburg / Layout, Satz: Leslie Strohmeyer, Hamburg

Vorwort

Im Sommersemester 1994 besuchte ich mit meiner Klasse die Ausstellung »Rinascimento, da Brunelleschi a Michelangelo« in Venedig. Jenes Postulat, dass künstlerische Arbeit spätestens seit der Renaissance untrennbar verbunden sein muss mit den Methoden wissenschaftlicher Forschung, wurde den Teilnehmern durch dieses Ereignis deutlich. Ein Gemälde, das man gewöhnlich in diesem Zusammenhang zitiert, wurde zum Höhepunkt des Rundgangs: das Porträt des Mathematikers Luca Pacioli. Man schreibt es Jacopo de Barbari zu. Die Konfrontation mit diesem Bild war Beginn des letzten Abschnitts meiner theoretischen Arbeit an der Kunsthochschule in Hamburg. Luca Pacioli, das Umfeld, seine italienischen Zeitgenossen und – als einziger Künstler nördlich der Alpen, der sich diesem erlauchten Kreis zurechnen darf – Albrecht Dürer bilden den Hintergrund für die jahrelange Forschung, die mit drei Beiträgen in dem vorliegenden Heft einen vorläufigen Abschluss findet. Der Titel »Das Viertbüchlein« verweist auf eine der letzten Abhandlungen Dürers, in dem u.a. die drei Themen dieses Heftes, behandelt werden: »cubi ratio« im Zusammenhang mit dem sog. Delischen Problem der »Würfelverdopplung«, der Glaspolyeder aus dem Luca-Porträt mit der Netzzeichnung eines »Rhombokuboktaeders« und die Erfindung einer »Zeichenmaschine«, die ihre Entstehung der Abbildung des »Zeichners mit der Laute« verdankt. Das Seminar zum »Viertbüchlein« aus der »Underweysung« wurde zu einem Höhepunkt der theoretischen Arbeit am Ende meiner Hochschultätigkeit. Ich bin daher sehr erfreut und dankbar für die allseitige Hilfe beim Zustandekommen des vorliegenden Heftes.

An erster Stelle gilt mein Dank Martin Köttering, dem Präsidenten der Hochschule für Bildende Künste, der im Rahmen meiner Verabschiedung als Anerkennung die Finanzierung der Schrift übernahm. Zugleich bedürfen alle Studentinnen und Studenten der Erwähnung, die auch, soweit sie nicht ausdrücklich genannt werden, durch praktische Arbeit und Diskussion teilnahmen an der Entwicklung. Besonderen Dank schulde ich selbstverständlich den Meisterschülern meiner Klasse und Autoren der Beiträge: Dominik Lutz und Artur Kenke. Sie fassten die Forschung zu Luca Pacioli zusammen. Maximiliane von Dohnányi und Bastian Zimmermann lieferten mit der Erfindung einer neuzeitlichen Zeichenmaschine eine moderne Interpretation der letzten Grafik Dürers aus dem »Viertbüchlein«, dem »Zeichner der Laute«.

Hier sei auch die freundliche Unterstützung für die Bereitstellung des Forschungsmaterials erwähnt: Victoria and Albert Museum London[1], das Museo Capo di Monte Neapel[2], insbesondere Oreste Lanzetta für die eigens für dieses Heft hergestellte Ausschnittfotografie des Glaspolyeders, und die Kunsthalle Bremen.[3]

Dem Inhalt der Schrift ID 06 entsprechend, wird der naturwissenschaftlichen Seite weiter Raum gegeben. Aus diesem Grunde sei zum Abschluss der Mathematik der nötige Respekt gezollt. Dieses erfordert einen Dankesgruß an Prof. Dr. Erhard Cramer vom Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen, der in einem Meisterstück der Logik eine plausible Erklärung für das in der bisherigen Forschung ungelöste Zahlenspiel auf der Tafel des Luca Pacioli fand. Nicht zuletzt aber um so herzlicher gilt meine Verehrung und Dank meiner Frau Roswitha Rosenbusch, die in vielen redaktionellen Fragen Unterstützung lieferte, darüber hinaus aber als Mathematikerin aus beruflicher Passion die algebraischen Nachweise führte zur »cubi ratio« und den »Delischen Problemen« in meinem eigenen Beitrag.

Lambert Rosenbusch

1 Euklid der Ausgabe Venedig 1482
2 Porträt des Luca Pacioli
3 Dürer Grafik

Lambert Rosenbusch

RÄUMLICHE PROPORTIONEN

Einleitung

Cubus autem est corpus ex sex lateribus aequali latitudine planitierum quadratum.
Vitruvius Lib. 5, Ausgabe Barbaro, Venedig 1567, p. 157

Meine Beschäftigung mit Architekturtheorie, in Ansätzen bereits zu Beginn meiner Tätigkeit als Architekt, führte als eine der ersten Erkenntnisse zur Feststellung der vorrangigen Bedeutung von Proportionen sowohl für die Arbeit am Reißbrett als auch für die Entscheidungen in der Praxis. Bauen heißt Schöpfung von Raum und Masse, die in gegenseitiger Bedingung ein Gebäude als Skulptur entstehen lassen. Proportion auf letztere bezogen besagt, dass Architektur als dreidimensionale Schöpfung betrachtet werden und daher hinsichtlich ihrer Stellung ausschließlich unter diesem ersten, vorrangigen Gesichtspunkt den Künsten der Bildhauerei zugeordnet werden muss.

Betrachtet man die Anordnung einer Skulptur unter dem Aspekt der Ausgewogenheit und der diese verursachenden Proportionen, so muss man folgendes beachten: Es bedarf immer dreier Maße im Raum, um einen Punkt zu bestimmen und deshalb zweier Proportionen um ein Objekt in seiner Gesamtheit zu erfassen.

Gesucht werden also in der Baukunst jene drei Maßverhältnisse, welche Auskunft geben über die wohlproportionierte Gestalt von Masse oder Raum und über die Beziehungen beider zueinander.

Unvermeidbar drängen sich heute in die Studien des jungen Architekten bei seiner Bemühung um den wichtigsten Komplex seines Berufes Bilder und Schlagworte aus einer Überfülle des Angebotes der einschlägigen Literatur. Sorgfältige Sichtung jedoch, lässt kaum Verwendbares zur Erläuterung der anfangs genannten Problematik finden.

Groß war daher meine Enttäuschung in jungen Jahren, als ausgerechnet der als Architekt von mir besonders geschätzte Charles-Éduard Jeanneret eine Erklärung über die Frage von Proportion und Raum schuldig blieb. Le Corbusier, wie er sich selbst nannte, gilt als einer der bedeutenden Baumeister des letzten Jahrhunderts. Seine Schrift »Der Modulor«,[1] die erstmalig 1949 in Paris erschien und die seine bis ins Detail ausgearbeitete Proportionslehre enthält, verbreitete sich in Windeseile um die ganze Welt und erlebte eine Vielzahl von Auflagen.

1 seine (Le Corbusiers) Modulortheorie ist ähnlich dogmatisch wie seine Forderungen an Architektur und Städtebau; Kruft, p. 464

Kaum ein Buch über neuere Architekturgeschichte bzw.- Theorie ist seit Erscheinen des »Modulors« veröffentlicht worden, das nicht ausführlich auf diesen Text verweist oder aus ihm zitiert. Dabei ist unter der anfangs genannten entscheidenden architektonischen Fragestellung der Inhalt der handgroßen quadratischen Broschüre eher als trivial zu bezeichnen. Der Meister benutzte die in der Geometrie allgemein seit der Renaissance bekannte Zahlenfolge des »Goldenen Schnittes« um daraus seine »Blaue und Rote Reihe« abzuleiten. Seine Äußerungen wenden sich an das breite Publikum und sind publizistisch geschickt aufgearbeitet. Sie bringen aber in der hier betreffenden Frage keine Antwort. Denn bei dem von ihm benutzen »Goldenen Schnitt« handelt es sich um eine Proportion der Fläche, nicht aber, wie der Autor Glauben machen und auch mithilfe seiner Schrift erklären möchte, um die Proportion der Architektur als einer dreidimensionalen Disziplin und damit um die Proportion des Raumes.[2]

2 Die erste Bewegung der Lebenden, der Menschen und Tiere, Pflanzen und Wolken, ist, den Raum in Besitz zu nehmen, es ist die ursprünglichste Offenbarung von Gleichgewicht und Dauer. Der erste Daseinsbeweis ist die Besitzergreifung des Raumes. Charles-Éduard Jeanneret, p. 31

Anders der Vicentiner Baumeister Andrea Palladio. Dieser gibt bereits vierhundert Jahre früher Auskunft auf die Frage, welche Höhe bei vorgegebenem Grundriss nach seiner Auffassung ein Zimmer haben soll.[3] Seine Darstellung richtet sich zwar nicht auf eine grundsätzliche Untersuchung einer dem »Goldenen Schnitt« entsprechenden Proportion des Raumes, aber in dem hier zitierten Kapitel der Quattro Libri verdeutlicht der Autor die prinzipielle Fragestellung, dass zur Definition der vollkommenen Skulptur in der Architektur neben der mit zwei Maßen die rechteckige Fläche des Grundrisses bestimmenden Proportion eine weitere erforderlich ist, nämlich die mit einem dritten Maß den Aufriss festlegende Beziehung. Palladio bietet im Kapitel 13 dem Leser anhand dreier Skizzen einfache zeichnerische Methoden zur Ermittlung von Raumhöhe.[4]

Meine Verärgerung über die in meinen Studien zu Proportionsuntersuchungen in der Literatur beobachtete oberflächliche und teils mangelhafte oder meistens fehlende Behandlung der Frage nach einer dem »Goldenen Schnitt« entsprechenden Proportion des Raumes verursachte meine sich über Jahre hinziehende Beschäftigung mit diesem Thema. Der Erfolg dieser Bemühungen stützt die Feststellung, dass nicht zuletzt in der Zeit der Datentechnik in der Nachrichten über den n-dimensionalen Raum populär und zum Alltag geworden sind, Untersuchungen der dritten Dimension vernachlässigt werden. Meine Forschungen beweisen, dass gerade hier überraschender Weise noch grenzenloses Neuland zu entdecken gilt und zugleich für die klassische Entwurfslehre die wohl interessantesten Erfahrungen gemacht werden können. Denn, auch wenn wir fortschrittlichen Menschen des 21. Jh. es nicht wahrhaben möchten, im Sinne ästhetischer Erfahrungen hat sich unser Wissen um die dritte Dimension seit der Antike nicht nennenswert erweitert.[5]

Meine Forschungen zur Proportion des Raumes, die ich in einer bewussten Parallelität zum Goldenen Schnitt der »sectio aurea«[6], die »cubi ratio«[7], nenne, stellen nur einen kleinen Ausschnitt eines großen weiten Umfeldes dar, das sich nach meiner Vermutung bis zu einem geschlossenen Kosmos in der Art des Euklides ausdehnt. Um das Thema überschaubar zu halten und es innerhalb der Fragestellung vermitteln zu können, verliefen die Forschungen um die »cubi ratio«, deren Ergebnisse im Folgenden vorgestellt werden, konsequent in Analogie zu den aus der »sectio aurea« bekannten Phänomenen.

1. Die Analogie der Konstruktion
2. Die Analogie der Algebraischen Formulierung
3. Die Analogie zur Reihe des Leonardo von Pisa, gen. Fibonacci.[8]

3 Andrea Palladio, I Quattro Libri, Libro primo, Cap. XIII, dell´ Altezza delle Stanze, p. 53

4 ibd. Palladio schlägt als Raumhöhe bei vorgegebenem Grundriss drei Möglichkeiten vor, nämlich das arithmetische, das geometrische oder das harmonisches Mittel zu der Grundrissproportion.

5 Pfeifer, p. 42; siehe hierzu auch das Kapitel über das sog. »Delische Problem«

6 Anstelle der ursprüngliche Bezeichnung in den ersten lateinischen Übersetzungen des Euklid »proportio habens medium et duo extrema« gilt seit Luca Pacioli jene Bezeichnung, die sein Hauptwerk trägt: De Divina Proportione, Venedig 1509; schon bei Kepler findet sich die Formulierung sectio proportionalis, Pfeifer p. 45 ff; Naredi-Rainer wie auch Hagenmaier erwähnen im Zusammenhang mit sectio aurea zwar Leonardo da Vinci als Namensschöpfer, schreiben aber die allgemeine Verbreitung mehr dem 19. Jh. zu, Naredi-Rainer p. 196

7 cubi ratio. Proportion des Würfel- (schnittes) oder frei: Raumproportion
Cubus (Neulatein) im 16. Jh. aus griechisch kybos (Höhlung, Auge auf dem Würfel, Würfel) (Etymologisches Lexikon dtv München 1995, p. 739); aber auch bereits bei: Ovid, Medicamina faciei femineae, 88, Schminkanweisungen als Hohlmaß; Würfel bei: Aulus Gellius, Noctes Atticae, Liber I, XX; M. Vitruvius Pollionis, De Architettura, Liber V, Praefatio (4)
Ratio, Maß, Bezug (et via), methodisch; In der Architekturtheorie verstanden als Proportion zwischen Größen, vgl. Francesco di Giorgio und Leonbattista Alberti in Wittkower, Das Problem der harmonischen Proportion in der Architektur, p. 83 ff

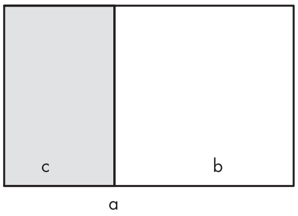
8 Leonardo von Pisa, 1175 – 1250, italienischer Mathematiker. Die auch nach dem französischen Mathematiker Lamésche Reihe genannte Fibonacci-Folge, erstmalig von diesem 1202 veröffentlicht im »Liber abaci«, (Kaninchenrätsel) Kruft, p. 463

Der goldene Schnitt / sectio aurea

Eine Strecke a ist nach der Regel des goldenen Schnittes in die Teilstrecken b und c genau dann geteilt, wenn gilt

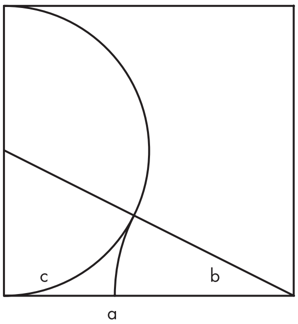
$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ wobei zu beachten bleibt, dass $a = b + c$ ist.

Stellt man diesen Sachverhalt mit Hilfe von Rechteckflächen dar, so heißt dies:



1. Ein Rechteck mit den Kanten a und b ($a > b$) hat genau dann die Proportion des goldenen Schnittes, wenn gilt: Trennt man vom Rechteck $a \cdot b$ das Quadrat $b \cdot b$, so bleibt das Rechteck $b \cdot (a - b)$ übrig, welches wieder die Proportionen des goldenen Schnittes aufweist: Es gilt:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ Dabei ist zu beachten, dass $c = a - b$ ist.



2. Wählt man nun $a = 1$, so bleibt noch $x = b$ zu bestimmen:

$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2 = 1 - x$

Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist:

$x = 0{,}5 \cdot (\sqrt{5} - 1) = 0{,}6180339887...$

Für alle drei Größen erhält man:

$a = 1$

$b = 0{,}6180339887...$

$c = 1 - b = 0{,}3819660112$

3. Die Fibonaccifolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ist definiert durch

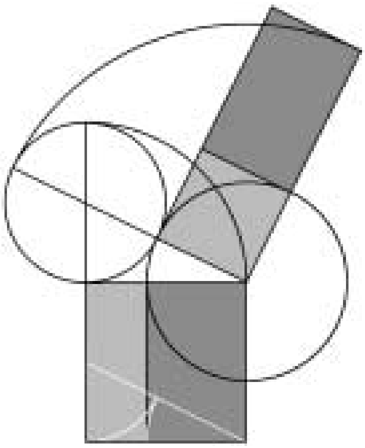
$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n = 2, 3, ...$

Bildet man daraus die Folge der Quotienten

$\frac{a_n}{a_{n+1}} : \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, ...$

so hat diese den Grenzwert $x = 0{,}5 \cdot \sqrt{5} - 1 = 0{,}6180339887...$

Eine formal ästhetische Beurteilung



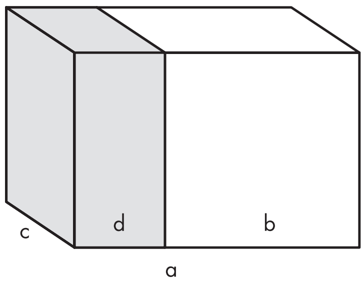
In philosophischer Hinsicht bleibt ein Gedanke nachzutragen, nämlich die Beurteilung der besonderen Proportionen wie der »sectio aurea« und der »cubi ratio« aus ästhetischer Sicht. Das Quadrat bzw. der Würfel gelten in allen Kulturkreisen als auffallend schöne Figuren, und werden in diesem Sinne als Urbilder verstanden. Aus dieser Sicht betrachtet, erscheinen zwei Konstruktionen erwähnenswert, in denen eine Flächen- bzw. Körperumformung auf der Grundlage ihrer Urbilder stattfindet. Die flächengleiche geometrische Umwandlung des Quadrates mithilfe des sog. Sehnen- Tangentensatzes in ein Rechteck, gebildet aus einem Abschnitt der Proportion des Goldenen Schnittes und einem kleineren Restquadrat der Minorabmessung, gilt daher als ein im philosophischen Sinne evidenter Schritt, als der Beleg für die besondere Rangordnung der Proportion der »sectio aurea«, nämlich als einer unmittelbaren Ableitung aus dem Urbild Quadrat.

Der räumliche Schnitt / cubi ratio

Eine Strecke a ist nach der Regel der cubi ratio durch eine senkrecht auf ihr stehende Strecke c genau dann in die Teilstrecken b und d geteilt, wenn gilt

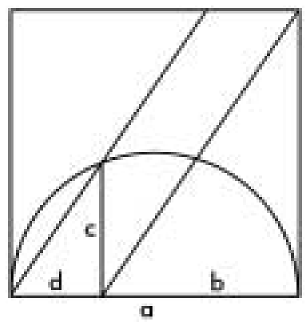
$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ wobei zu beachten bleibt, dass a = d + b ist.

Stellt man diesen Sachverhalt mit Hilfe von Quadern dar, so heißt dies:



1. Ein Quader mit den Kanten a, b und c mit a > b > c, hat die Proportion der cubi ratio genau dann, wenn gilt: Trennt man vom Quader $a \cdot b \cdot c$ den Teil mit der quadratischen Fläche $b \cdot b$, verbleibt der markierte Quader $b \cdot c \cdot d$, der wiederum die Proportion der cubi ratio hat. Es gilt:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ Dabei ist zu beachten, dass d = a – b ist.



2. Für die vier Größen a, b, c, d erhält man damit die drei Gleichungen

$a \cdot c = b^2$, $b \cdot d = c^2$, $d = a - b$

Wählt man nun a = 1, so bleibt noch x = b zu bestimmen.

Man erhält die Gleichung $x^3 = 1 - x$

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist: x = 0,6823278038 ...

Für alle vier Größen erhält man:

a = 1

b = 0,6823278038 ...

$c = b^2$ = 0,4655712318 ...

d = 1 – b = 0,3176721962 ...

3. Die Cubi-Ratio-Folge 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, ... ist definiert durch

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, n = 3, 4, \ldots$

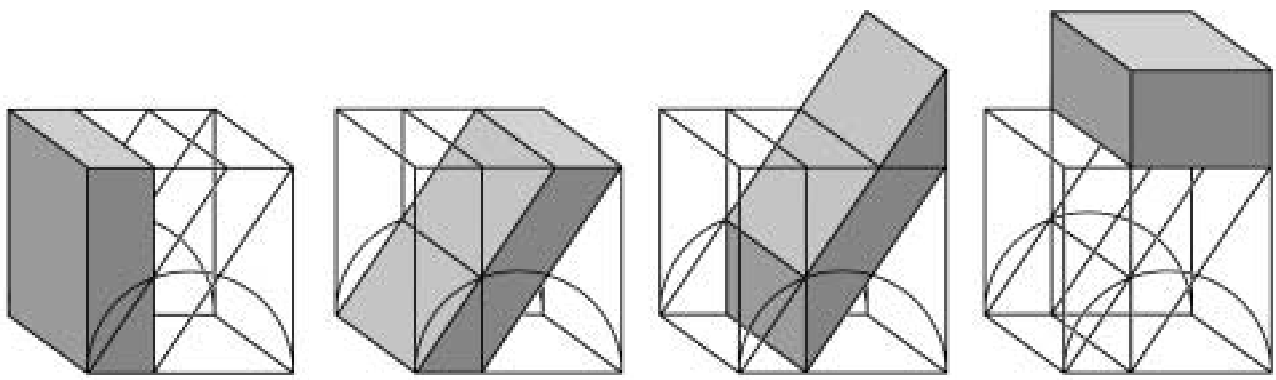
Bildet man daraus die Folge der Quotienten

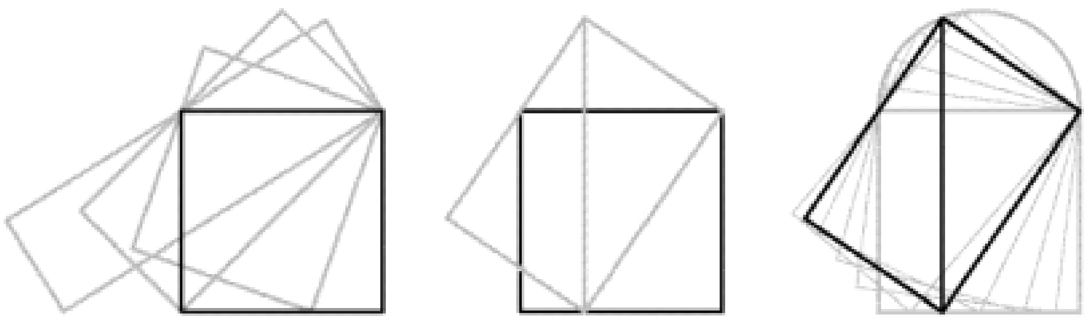
$\frac{a_n}{a_{n+1}} : \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{9}{13}, \ldots$

so hat diese den Grenzwert: x = 0,6823278038 ...

Alle rechnerischen Nachweise:
Dipl.-Math. Roswitha Rosenbusch

Wie bei der sectio aurea lässt sich auch für den dreidimensionalen Raum ein Evidenzprozess nachweisen. Es handelt sich hierbei um die Umwandlung des Würfels in einen inhaltsgleichen Quader nach der Proportion der »cubi ratio«. Diese Umformung des Urbildes findet geometrisch folgerichtig mithilfe von Parallelverschiebungen statt. Der auf diesem Weg entstandene wohlproportionierte Körper wirkt in seiner Ausgewogenheit als eigenständige, ästhetisch anspruchsvolle Skulptur.





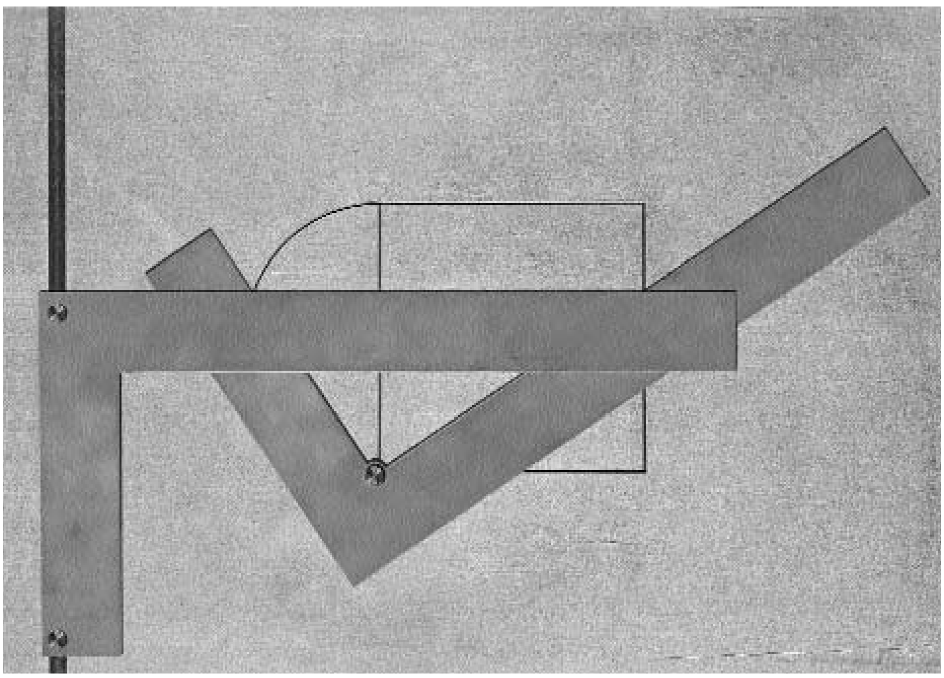
Die Proportionsmaschine

Im Juni 2004 macht ein Hamburger Architekt[9], ehemaliger Meisterschüler des Ateliers für Grundlagen an der Hochschule für Bildende Künste, folgende Entdeckung: Transformiert man ein Quadrat derart in ein Rechteck, dass man dieses im Uhrzeigersinn um den oberen, rechten Eckpunkt dreht, wobei die benachbarte untere Ecke auf der Horizontalen nach links wandert und die gegenüberliegende Seite die obere linke Ecke des Ausgangsquadrates durchläuft, so sind die Flächen einander gleich. Wenn die Diagonale des Rechtecks senkrecht auf der Standlinie steht, entspricht die Proportion des Rechtecks den Regeln der cubi ratio.

9 Dipl.-Ing. Jaroslaw Rygielski
rygiel@gmx.de

Nachdem ich von dieser Entdeckung erfahren hatte, konnte ich bereits in wenigen Tagen ein einfaches Konzept dafür entwickeln, die Proportion der cubi ratio mittels einer eigens dafür konstruierten Maschine[10] auf grafischem Wege zu bestimmen.[11] Aufgrund der Ergänzung der obigen Zeichnung um den Kreis des Thales gelang es, mithilfe eines mechanischen Berührpunktes zwei Rechtwinkel[12] so durch gemeinsames Verschieben bzw. Drehen gegeneinander zu bewegen, dass ein exakter Schnittpunkt von zwei Winkelschenkel mit dem Halbkreis bestimmt werden kann. Dieser Schnittpunkt liegt auf der gesuchten senkrechten Rechteckdiagonalen.

10 Zum Thema Proportionsmaschine siehe auch Albrecht Dürers Viertbüchlein Fig. 50, Bestimmung einer Kantenlänge des Würfels bei vorgegebenem Volumen.
11 Verschiedene Versuche waren an zu komplizierter mechanischer Technik gescheitert.
12 siehe auch sog. »Platonisches Kreuz«, Pauly 5, p. 1393



cubi ratio, Proportionsmaschine
Stahl 248 x 362 x 28 mm, Design Lambert Rosenbusch 2005, mit Jarek Rygielski und Alexander Holtkamp

Da es sich bei der »cubi ratio« um eine räumliche Proportion handelt, die sich u.a. auch auf eine Würfelumformung bezieht, nämlich um die Verwandlung eines Hexaeders in einen bestimmten Quader gleichen Inhalts, besteht hier in gewissem Sinne eine Parallelität zu dem sog. »Delischen Problem«. Wie auch dieses ist die »cubi ratio« zwar nicht mit Euklidschen Mitteln, Zirkel und Lineal, konstruierbar, aber mithilfe von Kreis und Geraden darstellbar, wohingegen die uns aus der Antike bekannten Lösungen der Würfelverdopplung nur über Schnittpunkte (syndromas) auf Konchoide, Hyperbel oder Parabel [13] konstruierbar sind.

Zirkel, Lot und Richtscheit sind jene Instrumente des Architekten, die seit Urzeiten in diesem Beruf nahezu mystische Verehrung genießen. Man begreift dieses in Kenntnis vieler großer Werke der Baukunst, deren Geometrie, wie man weiß, ausschließlich durch die Anwendung dieser einfachen Hilfsmittel zustande kam. Das sog. Geheimwissen um die Architektur fußt bis zur Gegenwart weitgehend auf der ins Monumentale der Baukunst umgesetzten Geometrie des Euklides, die dieser im 3. Jh. v. Chr. in den dreizehn Büchern [14] der »Elemente« zusammengetragen hat. Der Mathematiklehrer aller Völker und Generationen, [15] wie der antike Wissenschaftler hochachtungsvoll genannt wird, lieferte die wesentliche Grundlage für das Bauen in Europa und gilt bis heute über alle Jahrhunderte als die wichtigste Quelle zur Ausübung dieser Kunst.

Zu den selbstverständlichen Voraussetzungen Euklidscher Logik zählt, dass Beweisführung von geometrischen Lehrsätzen nur zulässig ist, solange man sich ausschließlich im Rahmen der Anwendung der Mittel von Zirkel (Kreis) und Lineal (Geraden) bewegt. Unter diesen Voraussetzungen wird verständlich, dass seit der Antike drei Aufgabenstellungen als unlösbar gelten. Diese sind zwar schon sehr früh näherungsweise beantwortet worden, können aber nicht im Sinne der vollendeten Beweisführung eines Euklid als gelöst angesehen werden.

Es sind diese, die Quadratur des Kreises, [16] die Dreiteilung des Winkels und die Antwort auf das sog. »Delische Problem«. [17] Letzteres gilt allgemein als das heute weniger bekannte, ist aber im Rahmen dieser Abhandlung von besonderer Bedeutung, da es sich hierbei um eine räumliche Umformung handelt. In der Literatur soll es erstmalig in einer verschollenen Tragödie des Euripides 5. Jh. v. Chr. erwähnt worden sein. [18] Bei dem sog. »Delischen Problem« handelt es sich um das Thema der »Würfelverdopplung«. [19] Gemeint ist hierbei eine Aufgabenstellung, nach der verlangt wird, aufgrund der Maße eines vorhandenen einen neuen regelmäßigen Hexaeder (Würfel) zu konstruieren, dessen Inhalt bei gleicher Proportion (Würfel) zweimal so groß ist.

In moderner Algebra beschrieben heißt die Forderung: $a^3 = 2\,b^3$

Grobe Näherungslösungen sind bereits von den ersten Pythagoräern durchgeführt worden, ein systematisches Verfahren ist insbesondere seit Archytas [20] bekannt.

13 Konchoide bei Nikomedes, Heron, Pappos; Hyperbel bei Apollonios; Hyperbel und Parabel bei Eudoxos; andere, besonders mechanische Verfahren, Platonisches Kreuz oder Mesolabion des Eratosthenes, Pauly 5, p. 1392

14 Die Urheberschaft der Bücher 14 und 15 ist umstritten und wird nicht dem Euklid zugerechnet, Lorenz, p. XVI

15 Pauly 2, p. 416 ff

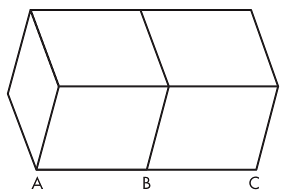
16 Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises durch den Mathematiker Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) www.history.mcs.st-andews.ac.uk

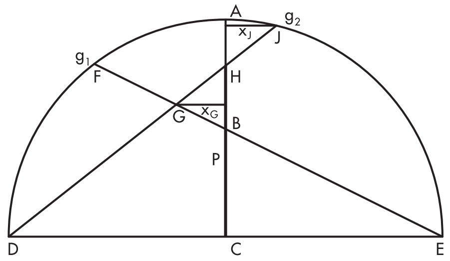
17 Beweis der Unlösbarkeit der Dreiteilung des Winkels und des sog. Delischen Problems durch Evariste Galois (1811 – 1832) did.mat.uni.bayreuth.de

18 Pauly 5, p. 1390

19 Einer Überlieferung nach wünschte König Minos die Verdopplung des würfelförmigen Grabmales seines Sohnes Glaukos, das von einer Seitenlänge war von 100 altgriechischen Fuß. Im anderen Fall handelt es sich um einen Spruch des Orakels des Apollo von Delos, daher Delisches Problem. Nach dem Ende der in Athen wütenden Pest befragt, wurde dieses vom Orakel in Aussicht gestellt, wobei es die Verdopplung des Apollo-Altares verlangte, der die Form eines Würfels hatte (Brockhaus 1908). Auch Albrecht Dürer bedient sich in seinem mathematisch korrektem Vorschlag zur Würfelverdopplung dieser Fassung. Hierzu siehe auch Underweisung Fig. 44 am Ende dieses Beitrages.

20 Archytas von Tarent, Pythagoräer 1. H. 4. Jh. b. C., Pauly 1, p. 520





Würfelverdopplung nach Dürer / Viertbüchlein 44

Die Strecke $\overline{AB}$ wird mit 1 (Länge des ursprünglichen Würfels) angenommen. Der Radius des Halbkreises $\overline{DC} = \overline{CE} = \overline{AC}$ hat dann die Länge 2. Die Strecke $\overline{CH}$ wird mit p bezeichnet.

Durch die Punkte E und F wird die Gerade g_1 gelegt mit der Gleichung

$$g_1: \; y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Durch die Punkte D und J wird die Gerade g_2 gelegt mit der Gleichung

$$g_2: \; y = \frac{p}{2}x + p = \frac{p}{2}(x+2)$$

Die Gerade g_2 wird um D so gedreht, dass die Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{HJ}$ gleich lang werden. Dann gilt nach dem Strahlensatz (H ist Zentrum): $|x_G| = |x_J|$

x_G wird als x-Koordinate des Schnittpunktes G von g_1 und g_2 berechnet:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{p}{2}x + p \;\Rightarrow\; 1 - p = \frac{p}{2}x + \frac{1}{2}x \;\Rightarrow\; 1 - p = \frac{x}{2}(p+1) \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{2(1-p)}{p+1} < 0 \qquad \text{Also gilt: } |x_G| = \frac{2(p-1)}{p+1}$$

x_J wird als x-Koordinate des Schnittpunktes J vom Halbkreis ($x^2 + y^2 = 4$) und der Geraden g_2 berechnet:

$$4 - x^2 = \left(\frac{p}{2}(x+2)\right)^2 \;\Rightarrow\; (2-x)(2+x) = \left(\frac{p}{2}\right)^2(x+2)^2 \;\Rightarrow\; (2-x) = \frac{p^2}{4}(x+2) \;\Rightarrow$$

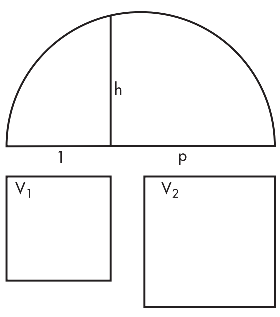
$$8 - 4x = p^2x + 2p^2 \;\Rightarrow\; 8 - 2p^2 = (p^2+4)x \;\Rightarrow\; 2(4-p^2) = (p^2+4)x \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{2(4-p^2)}{(4+p^2)} \qquad \text{Also gilt: } |x_J| = \frac{2(4-p^2)}{(4+p^2)}. \qquad \text{Gleichsetzen von } |x_G| = |x_J| \text{ ergibt:}$$

$$\frac{2(p-1)}{(p+1)} = \frac{2(4-p^2)}{(4+p^2)} \;\Rightarrow\; \frac{p-1}{p+1} = \frac{(4-p^2)}{(4+p^2)} \;\Rightarrow\; (p-1)(4+p^2) = (p+1)(4-p^2)$$

$$\Rightarrow\; 4p - 4 + p^3 - p^2 = 4p + 4 - p^3 - p^2 \;\Rightarrow\; -4 + p^3 = 4 - p^3 \;\Rightarrow\; 2p^3 = 8 \;\Rightarrow$$

$$p^3 = 2^2 \;\Rightarrow\; p = (\sqrt[3]{2})^2$$

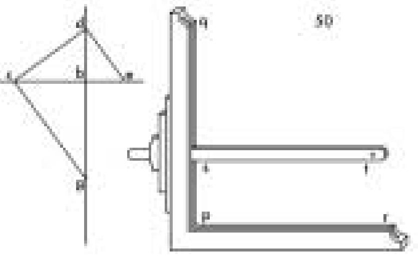


Nach dem Höhensatz gilt:

$h^2 = 1 \cdot p \;\Rightarrow\; h^2 = p \;\Rightarrow\; h^2 = (\sqrt[3]{2})^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt[3]{2}$

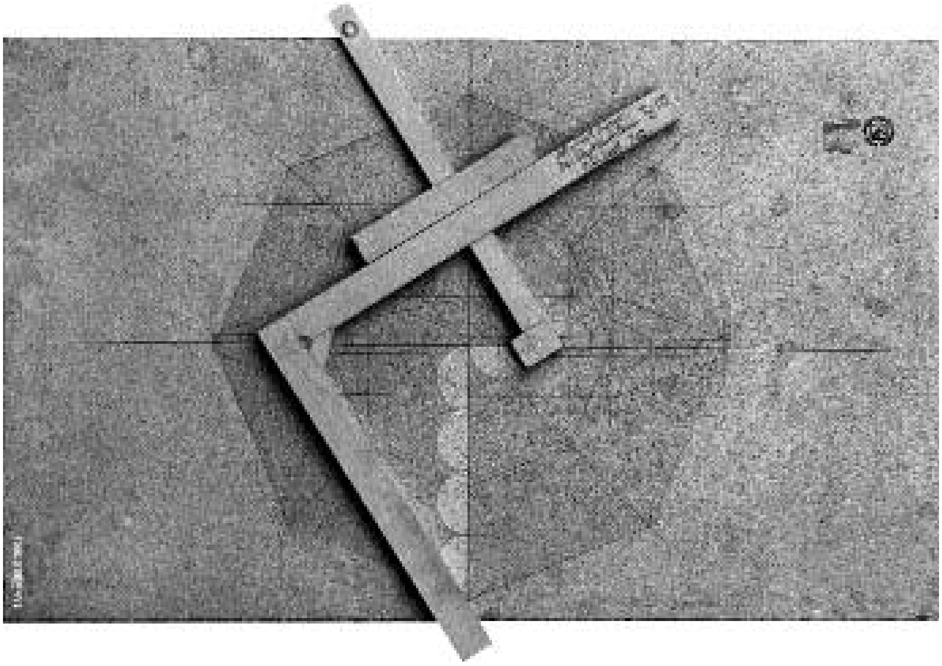
Diese Strecke h ist die Kantenlänge des Würfels mit dem doppeltem Volumen:
$(\sqrt[3]{2})^3 = 2$

Der vorstehende rechnerische Nachweis belegt, dass Albrecht Dürer zur Anlage des Viertbüchleins über außerordentliche geometrisch mathematische Kenntnisse verfügte. In seinem Werk geht er weit über das hier angeschnittene Thema der Würfelverdopplung hinaus. Er behandelt in gleich exakter Weise Verdrei- und Vervierfachung, sowie weitere geometrische Verfahren.



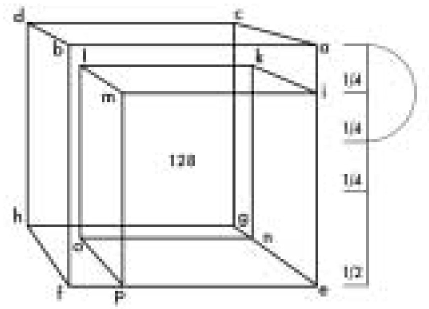
Besondere Aufmerksamkeit verdient die in seiner Zeichnung 50 dargestellte Anleitung zum Bau einer Proportionsmaschine. Das geometrische Verfahren folgt dem sog. »Platonischen Kreuz«, das bereits in der Spätantike als ein mechanischer Lösungsweg für das »Delische Problem« mittels zweier Verschiebungs-Rechtwinkel bekannt war.[21]

21 Pauly 5, p. 1393



Proportionsmaschine nach Albrecht Dürer
Faserplatte 360 x 216 x 32 mm
Design Lambert Rosenbusch 2005

W ü r f e l v e r d o p p l u n g b e i L e o n a r d o d a V i n c i



Neben der Quadratur des Kreises hat vor allem die Beschäftigung mit dem Thema der Würfelverdopplung seit der Renaissance auch bei anderen Künstlern Interesse gefunden. So ist im Codex Atlanticus 58 r-a eine Zeichnung des Leonardo überliefert, in der er sich um eine Lösung dieser bereits in der Antike bekannten Aufgabe bemüht. In zentral-perspektivischer Technik, einer sog. Hauptpunktperspektive, sind, senkrecht zur Bildebene auf einer Seite liegend, zwei unterschiedlich große Hexaeder dargestellt. Mit der Feder in Sepia sind die beiden Körper als reine Strichzeichnung so angelegt, dass sie wie durchsichtig erscheinen, damit alle Kanten und Ecken, auch die hinteren, erkennbar werden. Der kleinere Würfel befindet sich vollständig innerhalb des anderen. Er ist so in dem größeren angeordnet, dass er mit diesem vorn unten rechts eine gemeinsame Ecke hat. So berühren sich drei Seitenflächen in gleichen Ebenen. Es sind diese die Standfläche, die rechte aufrechte und die vordere.

Front- und Rückseiten erscheinen in der räumlichen Darstellung als Quadrate. Alle anderen Seiten beider Würfel sind nach links bzw. oben verschobene Trapeze. Der Horizont befindet sich um den Abstand der größeren vorderen Würfelfläche über dieser. Er ist nicht dargestellt. Gleiches gilt für den sog. Hauptpunkt, der zum besseren räumlichen Verständnis vom Zeichner um gut eineinhalb Würfelseiten nach links verschoben ist.

Anders als Dürer fasst Leonardo die Aufgabe sehr pragmatisch an. Da er sich in den Proportionen der ganzen Zahlen auskennt, und weiß, wie man irrationale Werte umgeht, nennt er als Größe für die Seitenlänge des kleinen Hexaeders vier braccia (Ellen). Demzufolge ist der Rauminhalt $4^3 = 64$ Kubikellen, so dass der gesuchte Hexaeder über das doppelte Volumen von 128 Kubikellen verfügen sollte. Als die zugehörige Kantenlänge vermerkt Leonardo: »5 und ein gewisser unsagbarer Bruchteil, der leicht auszuführen, jedoch schwer auszudrücken ist.«[22] Er umgeht damit als Wert die dritte Wurzel aus 128, eine irrationale Zahl, die mit 5,04 kaum nennenswert über der einfach handhabbaren 5 liegt.

Das delische Problem der Würfelverdopplung löst Leonardo, indem er es auf ein einfaches Proportionsverfahren reduziert, nämlich auf die Verlängerung einer der vorgegebenen Kanten um ein Viertel ihres Wertes. Grafisch ist dieser Vorgang mit fünf Zirkelschlägen zu bewerkstelligen.

Die Anlage der Zeichnung lässt vermuten, dass Leonardo zur Ermittlung der gesuchten Werte raumanschaulich vorging. Stufenweise Lösungen über das Addieren von Scheiben und Balken waren schon in der Antike bekannt.[23]

22 zitiert in: Leonardo, Forscher, Künstler, Magier; Beitrag von Augusto Marinoni, Leonardos Schriften, p. 73 / 1 Geometrische Studien Atlanticus 58 r-a

23 Pauly 5, p. 1391

Literatur

dtv München, Der kleine Pauly, München 1975

dtv München, Etymologisches Lexikon, München 1995

Aulus Gellius, Noctes Atticae / Latin Library / Ad Fontes Academy U.S., Net 2002

Otto Hagenmaier, Der goldene Schnitt, Heidelberg 1963

Hanno Walter Kruft, Geschichte der Architekturtheorie, München 1985

Le Corbusier (C.-É. Jeanneret), Der Modulor, Stuttgart 1953

Johann Friedrich Lorenz, Euklid´s Elemente, Halle 1798

D. Neroman, Le Nombre d´ Or, Paris 1946

Paul v. Naredi-Rainer, Architektur und Harmonie, Köln 1982

Andrea Palladio, I Quattro Libri, Vinetia 1581

Fr. Xav. Pfeifer, Der Goldene Schnitt, Wiesbaden 1885

Marcus Vitruvius Pollionis, De Architettura, Florentia 1522

Rudolf Wittkower, Grundlagen der Architektur, München 1969

Albrecht Dürer (CD), De Symmetria / Underweysung, 1-891788-07-8, 2001

Dominik Lutz

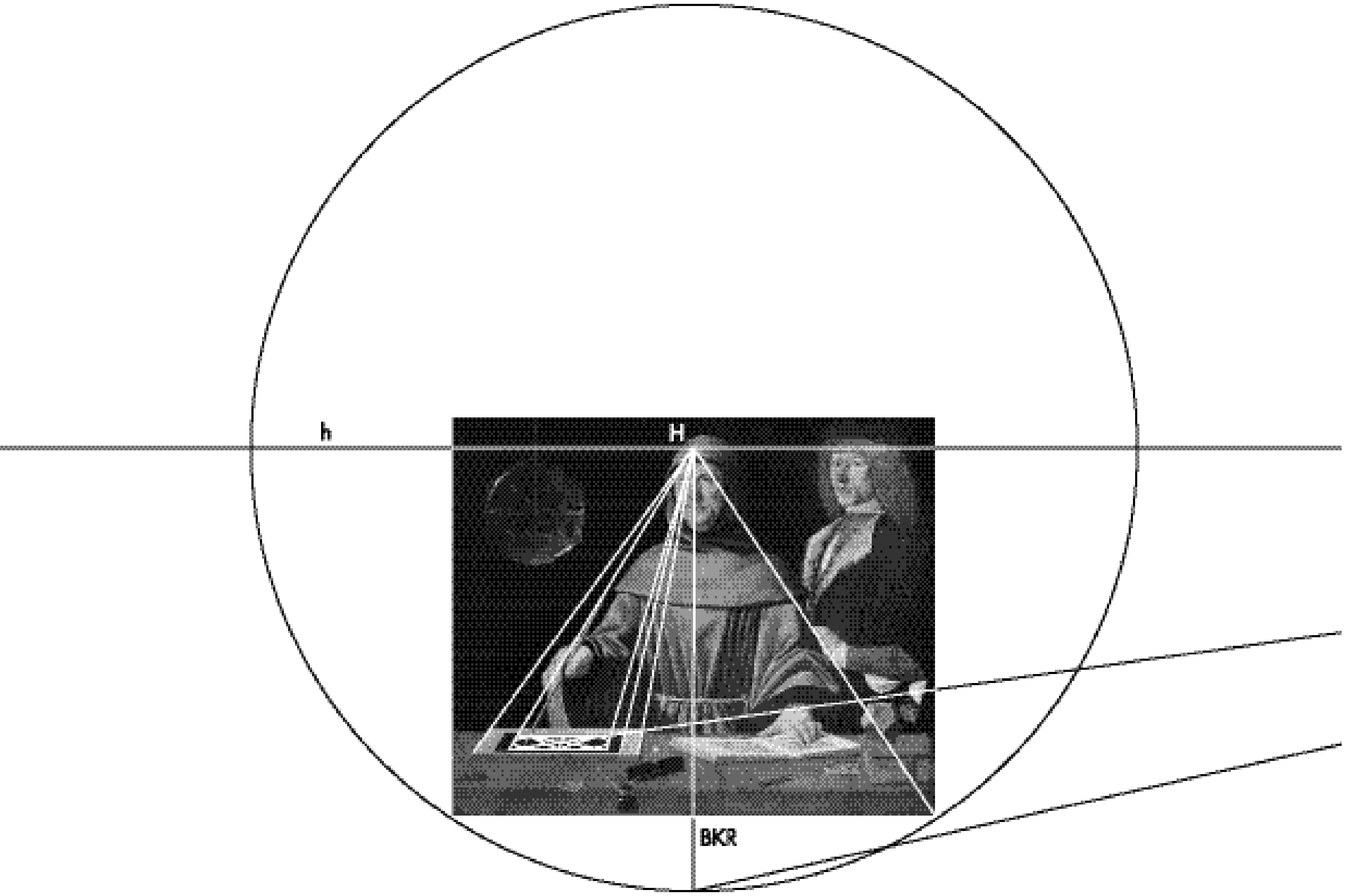
DER GLASPOLYEDER UND DAS BILD DES LUCA PACIOLI

Einleitung

Im Jahre 1495 malt Jacopo de Barbari das Porträt des Fra Luca Pacioli. Der in seiner Zeit bedeutende Mathematiker erscheint auf diesem Gemälde in seiner Funktion als Lehrer. Er wendet sich frontal dem Betrachter zu und ist im Augenblick einer geometrischen Demonstration vom Maler festgehalten. Der Mönch steht hinter einem grün bespannten Tisch auf dem die Gegenstände seiner Forschung angeordnet sind. Mit einem Zeigestab in seiner rechten Hand deutet Pacioli auf eine geometrische Figur auf der Zeichentafel. Seine Linke ruht auf einer aufgeschlagenen Buchseite der »Elemente« Euklids, an deren Rand eine entsprechende Zeichnung abgebildet ist. Die übrigen Gegenstände auf dem Tisch sind ein Schwamm, ein Winkelmaß, ein am vorderen Tischrand hängendes Tintenfass, eine kleine zylindrische Schatulle, ein Stück Kreide, ein Zirkel, ein kleines Kärtchen mit dem Namen des Malers, auf dem eine Fliege sitzt. Am rechten Bildrand liegt ein mit drei Schließen verriegeltes Buch mit der Aufschrift LI. R. LUC. BUR (Liber reverendi Luca Burgensis). Dabei handelt es sich um das 1494 erschienene Hauptwerk Luca Paciolis, Summa de arithmetica. Auf dem Buch ist ein gut faustgroßer hölzerner Dodekaeder positioniert.
Der junge Mann rechts hinter der Hauptfigur ist im Halbprofil dargestellt. Er blickt über seine linke Schulter den Betrachter an. Auf der anderen Seite hängt an einem roten Faden ein zur Hälfte mit Wasser gefüllter Glaspolyeder.

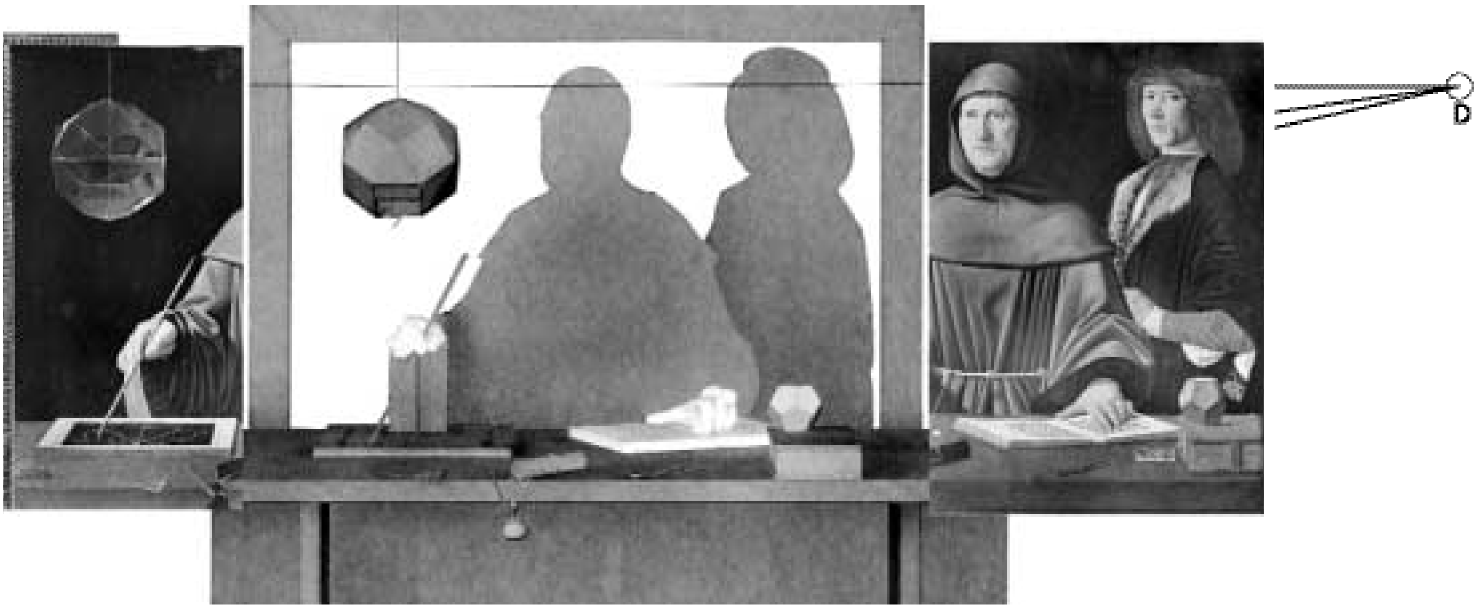
Das Gemälde gilt gemeinhin als Schlüsselwerk in Betrachtungen über die frühe Renaissance, insbesondere in Bezug auf den damaligen Stand der Mathematik bzw. Geometrie. Die Identität der dargestellten Personen sowie deren Beziehungen zu Personen der Zeitgeschichte werden bis zur Gegenwart ebenso diskutiert wie die Identität des Malers. Auch in Bezug auf die Gegenstände und deren Bedeutung herrscht in mancher Hinsicht Unklarheit. Nach wie vor gibt es in der Literatur keine eindeutige Darstellung. Die Bildinterpretationen sind zahlreich und oftmals widersprüchlich.

Der vorliegende Beitrag beleuchtet das Porträt unter dem Blickwinkel der Geometrie mit dem Anliegen, Aufschlüsse über die Konzeption perspektivischer Gemälde am Ende des 15. Jahrhunderts zu erlangen. Zur Vorbereitung wird der Bildraum des Gemäldes mit Hilfe einer geometrischen Bildanalyse erfasst und in einen dreidimensionalen Versuchsaufbau umgesetzt. Der folgenden Untersuchung wird die Frage vorangestellt, wie das Bild aus der Sicht neuzeitlicher geometrischer Interpretation unter Zuhilfenahme moderner Mittel zu beurteilen ist.



Bestimmung der geometrischen Elemente

Das Bild zeigt einen exakt nachvollziehbaren räumlichen Aufbau, der als zentralperspektivische Darstellung wiedergegeben ist. Folglich müssen die Bestimmungsstücke dieser Zentralprojektion zu ermitteln sein. Diese sind der Augpunkt A, der Horizont h, der Hauptpunkt H, und die Distanz D (Abstand des Augpunkts zur Bildebene). Zur Entschlüsselung der Bildgeometrie ist die rechteckige Zeichentafel von zentraler Bedeutung. Sie liegt in paralleler Lage zur Bildebene auf dem Tisch, d.h. vordere und hintere Tafelkante verlaufen parallel zum Horizont. Die seitlichen Kanten weisen in den Bildraum hinein und schneiden sich in der Verlängerung vor der Stirn Luca Paciolis im sog. Hauptpunkt H. Dieser stellt das geometrische Zentrum der Perspektive dar. Durch den Hauptpunkt verläuft der Horizont h. Damit sind bereits zwei von vier für die geometrische Analyse notwendigen Bestimmungsstücken gefunden. Ein drittes, das die Staffelung der Gegenstände in der Tiefe beschreibt, ist durch die Zeichnung auf der Tafel gegeben: auf dieser ist eine Ellipse und ein in sie einbeschriebenes Dreieck dargestellt. Aufgrund der Tatsache, dass an der Stirnseite der Tafel »EUCLIDES« steht, ist anzunehmen, dass das Problem auf der Tafel zu



links: Geometrische Analyse zur Bestimmung von Horizont h, Hauptpunkt H, Distanz D und Bildkreisradius BKR.

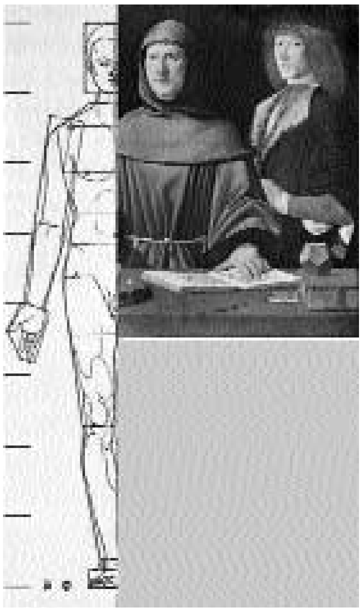
rechts: Die Abbildung zeigt den dreidimensionalen Bildraumnachbau, der entsprechend der Bildgeometrie des Gemäldes aus dem Augpunkt fotografiert ist.

dessen Themenkreis gehört. Seine Geometrie ist allein mit Zirkel und Lineal lösbar. Demnach ist die auf der Tafel dargestellte Ellipse in der Draufsicht ein Kreis. Legt man nun an die Ellipse zwei Tangenten, die sich im Hauptpunkt schneiden und zwei, die parallel zum Horizont verlaufen, so ist das daraus resultierende Trapez ein Quadrat in der Perspektive.

Die relativen Größen

Findet man in einer Hauptpunktperspektive ein solches Quadrat, so ist damit die räumliche Verkürzung definiert, denn die verlängerte Diagonale im perspektivisch dargestellten Quadrat der vorbeschriebenen Art schneidet den Horizont h, im so genannten Distanzpunkt D. Da der Abstand von D zu H der in die Bildebene geklappte Abstand des Augpunktes A von der Bildebene ist, sind alle Bestimmungsstücke der Perspektive ermittelt und die Größenverhältnisse der auf dem Tisch liegenden Gegenstände festgelegt. Die Maßverhältnisse erhält man über ein Bezugsraster, das von der vermessenen Tafel ausgehend über den Tisch gelegt wird.

Die wahren Größen: Rekonstruktion der räumlichen Situation



Albrecht Dürer reguliert den Aufbau des Körpers eines Mannes in achtfache Höhe seines Kopfes

Was noch zur Vollendung der geometrischen Analyse fehlt, ist die Angabe objektiver Maße. Dieser Vorgang bedarf einer Maßeinheit. Man benötigt dazu den Wert der realen Größe mindestens eines Gegenstandes oder einer Person.

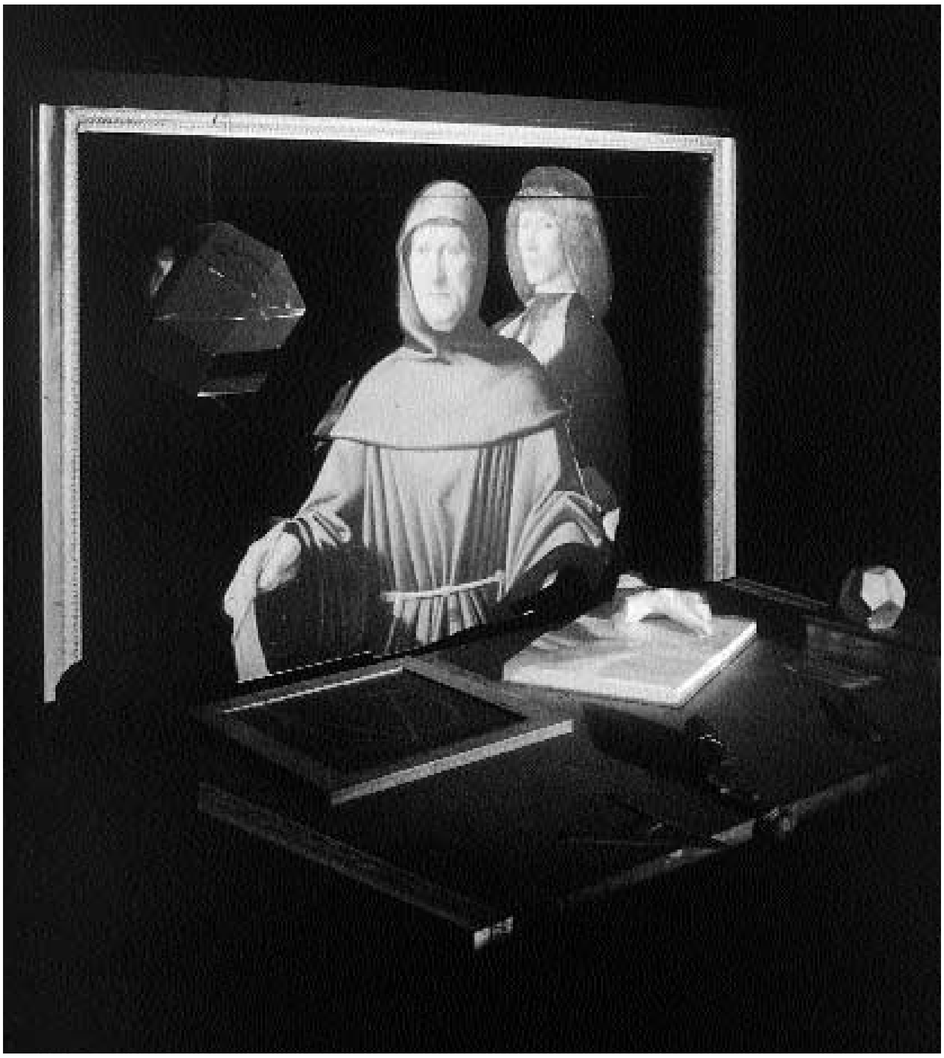
Dieser wird über ein Näherungsverfahren ermittelt indem Augabstände, Schulterbreiten und Kopfgrößen der dargestellten Personen zueinander ins Verhältnis gesetzt werden. Daraus ergibt sich für Luca Pacioli eine Aughöhe von 162 cm. Der Abstand zwischen Pacioli und Tisch liegt entsprechend einiger Versuche mit einer Vergleichsperson zwischen sieben und 15 cm. Folglich ist auch die Tischhöhe und damit das gesamte Bezugssystem in seiner absoluten Größe definiert. Lage und Größe des hängenden Glaspolyeders lassen sich aufgrund von Spiegelungen in zwei quadratischen Körperflächen bestimmen: In der nach vorne unten geneigten Fläche ist die Tischkante zu sehen und in der nach vorne rechts unten geneigten Fläche ein Teil des Tisches, sowie eine schemenhafte Person mit Zeigestab. Der Körper befindet sich damit räumlich betrachtet in einer Ebene mit Luca Pacioli.

Alle wichtigen Bildelemente werden nun in Holz, Gips oder Pappe nachgebaut: Pacioli und sein Schüler als Silhouette, die übrigen Bildelemente wie Hände, Zeigestab, Tisch, Zeichentafel, Buch 1 (Elemente), Buch 2 (Summa), Tintenfass, Winkel, Dodekaeder und Rhombenkuboktaeder als dreidimensionale Nachbildungen. In den hängenden Polyeder werden an den oben erwähnten, nach vorne unten und zur Seite geneigten Körperflächen Spiegel eingesetzt (s. Abb. S. 15).

Das Projektionsexperiment

Nachdem alle Bildelemente mithilfe des Bezugsraster ausgerichtet sind, wird die Silhouette Paciolis in die Bildebene gelegt. Ein auf die Brennweite des Mittelformat-Diaprojektors und die Bildgeometrie abgestimmtes Diapositiv des Gemäldes wird aus der ermittelten Distanz von D = 4,76 m auf die Staffage projeziert.[1] Dabei kommen die meisten Details der Staffage mit dem projezierten Bild zur Deckung. Auf der Tafel bildet sich die Zeichnung mit Kreis und Dreieck ab. Der vor der Tafel liegende Winkel passt genau in den spitzen Winkel des auf der Tafel skizzierten Dreiecks von 67,5 Grad. Das Licht des Diaprojektors wird in den Spiegeln des hängenden Polyeders reflektiert und auf die Stellen geworfen, die im Bild als Reflektion in den Körperflächen zu erkennen sind. Dabei ist zu bemerken, dass der im Bild als Spiegelung gezeigte Ausschnitt in der nach vorne rechts unten geneigten Körper-

1 Der fotografische Prozess ist ein Abbildungsvorgang, der geometrischen Gesetzen folgt. Aus diesem Grund sind Fotografien messfähig, sobald ein Bezugsmass gegeben ist. Wenn z.B. ein Würfel fotografiert wird und die Brennweite des Objektivs und damit der Bildwinkel bekannt sind, lässt sich die Aufnahme deckungsgleich zurück auf den Gegenstand projizieren. Dabei ist zu beachten, dass die Brennweite des Projektorobjektivs der Brennweite des Kameraobjektivs entspricht. Zudem müssen Standpunkt von Kamera und Projektor derselbe sein. Man erhält eine identische Abbildung auf dem Gegenstand.



Das gemalte Bild wird mittels eines Diaprojektors aus dem geometrischen Augpunkt des Versuchsaufbaus auf die Staffage projeziert. Das durch die beiden in den Rhombenkuboktaeder eingesetzten Spiegel abgelenkte Licht trifft zum einen auf die durch die Tafel verdeckte, hintere Tischkante, zum anderen auf den rechten Oberarm Luca Paciolis.

fläche zu groß ist. Im Bild ist eine schemenhafte Figur mit Zeigestab zu erkennen, während das Licht des Diaprojektors, das durch den Spiegel in der Körperfläche abgelenkt wird, nur auf eine kleine Stelle am Oberarm Luca Paciolis trifft.
Anhand der geometrischen Analyse und der empirischen Untersuchung mithilfe des räumlichen Versuchsaufbaus kann nachgewiesen werden, dass die Darstellung Luca Paciolis vom Maler in wahrer Größe festgehalten wurde. Seine Körpergröße kann so mit 170 cm angegeben werden.

Bei der weiteren Untersuchung des Versuchsaufbaus sind deutliche Abweichungen zwischen Staffage und Projektion festzustellen, die vor allem den Dodekaeder, die Zahlen auf der Zeichentafel, die Hände Luca Paciolis und das aufgeschlagene Buch betreffen.
Beim Dodekaeder ist die Projektion im Vergleich zum Modell zu schmal. Weil das Dodekaedermodell geometrisch exakt hergestellt ist, heisst das im Umkehrschluss, dass die Darstellung des Körpers im Bild geometrisch falsch ist.[2]
Steht man neben der dreidimensionalen Bildraumreproduktion und blickt von oben auf die Projektion der Tafelzeichnung, so sind die Zahlen am Rand der Zeichnung derart verzerrt, dass sie nicht zu entziffern sind. Das heißt, dass die Darstellung der Zahlen nicht der Bildperspektive folgt. Offenbar wollte der Maler erreichen, dass die auf dem Kopf stehenden Zahlen bei der Betrachtung des Bildes lesbar sind (s. auch S. 23).

2 Man darf annehmen, dass die geringfügige horizontale Stauchung des Dodekaeders entsprechend üblicher Malerregel erfolgt, nach der die Breite räumlicher Körper am Bildrand zur Vermeidung optisch ungewünschter Verzerrungen leicht reduziert wird. Diese Technik, »dynamische Perspektive« genannt, wird bereits von Raffael und Leonardo angewendet. Leonardo da Vincis Verbindung zu Luca Pacioli ist nachgewiesen. So sind beispielsweise die Zeichnungen zu »De Divina Proportione« aus seiner Hand. Sehr gut dargestellt ist dieses Thema in: Oscar Mothe, Illustriertes Baulexikon, Bd. 3, Berlin 1876, p. 437

Jacopo de Barbari:
Porträt des Fra Luca Pacioli
mit einem Schüler,
1495, Maße 120 x 99 cm

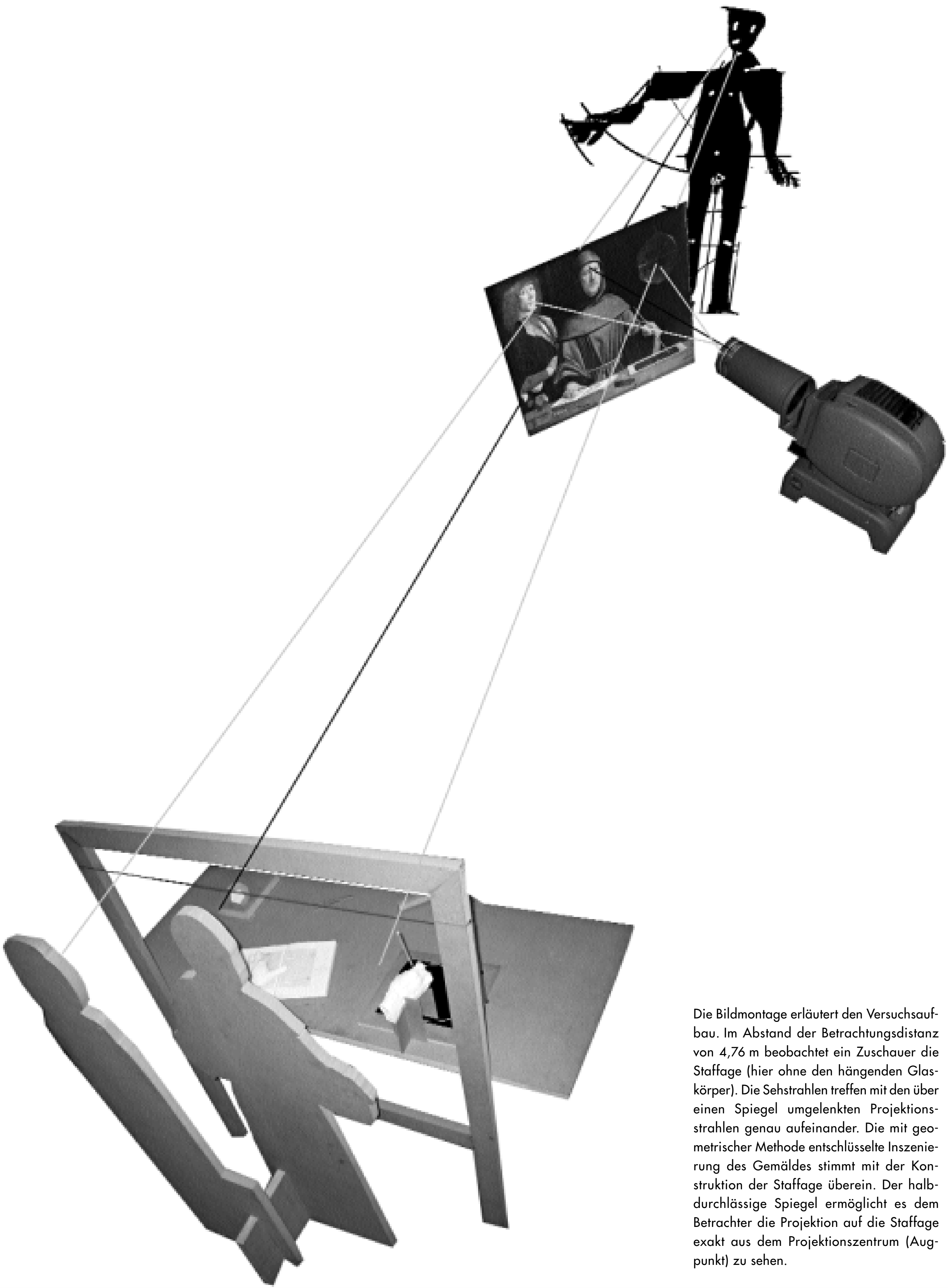
Das Projektionsexperiment beweist, dass insbesondere die linke Hand Luca Paciolis deutlich von einer realistischen Darstellung abweicht. Der Mittelfinger, scheint hier kürzer zu sein als der Zeigefinger.

Um einen direkten Vergleich zu ermöglichen, werden die entsprechenden Handhaltungen von einer Versuchsperson nachgestellt. Das Experiment zeigt dass eine solche Handstellung nicht möglich ist: Nicht nur der Mittelfinger, sondern auch der kleine und der Ringfinger der linken Hand Luca Paciolis sind zu kurz wiedergegeben. Der Mittelfinger müsste deutlich länger und damit stärker gebeugt sein.
Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass auch die Arme Luca Paciolis unterschiedlich dargestellt sind. So scheint der linke Ellenbogen deutlich tiefer zu sitzen als der rechte, obgleich die Schultern waagerecht ausgerichtet sind.[3]

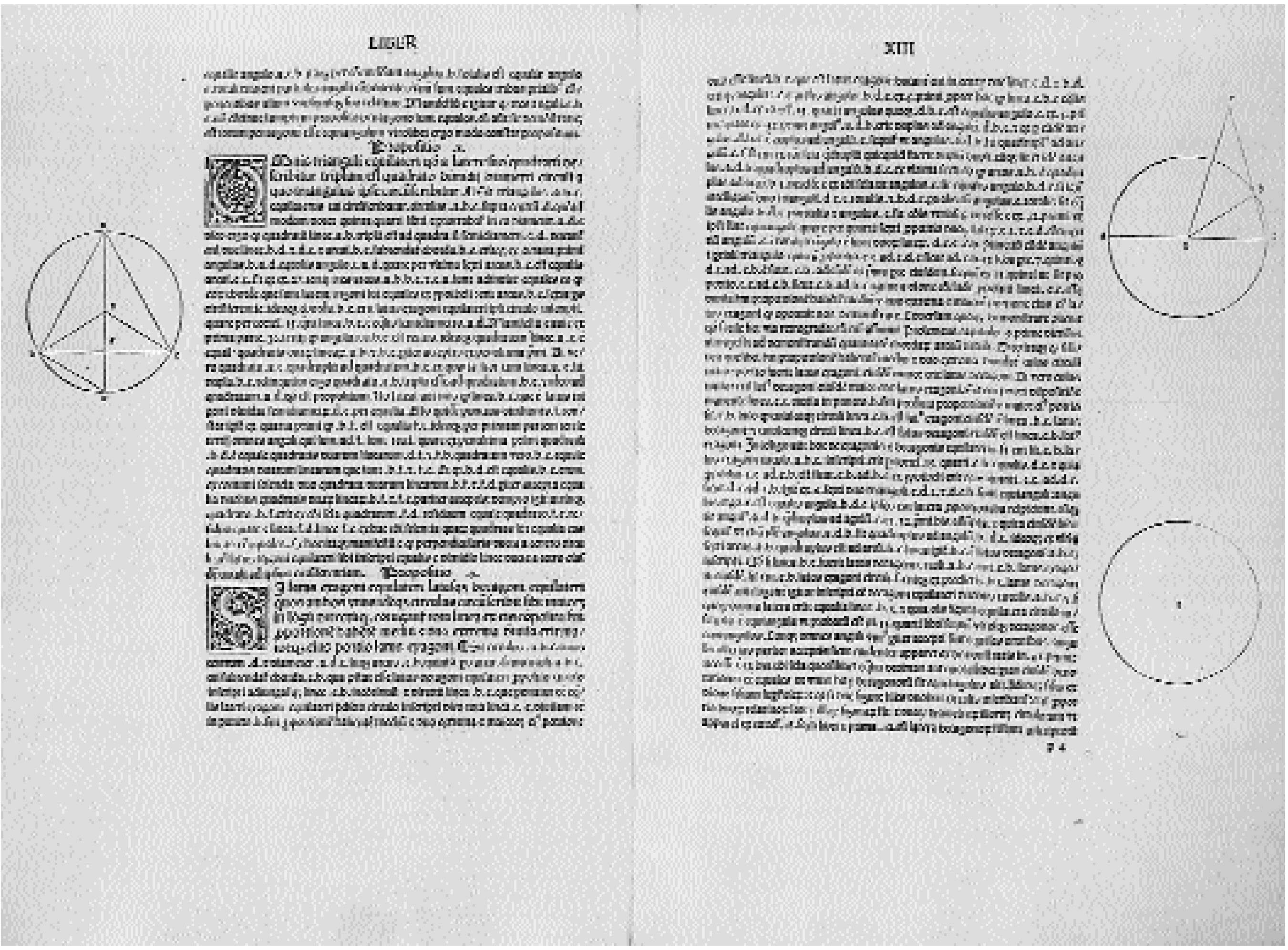
Die zeichnerische Darstellung des in der Mitte aufgeschlagenen Buches entspricht nicht der Wirklichkeit: Der Buchblockrücken müsste in aufgeschlagenem Zustand deutlich sichtbar nach oben gewölbt sein. Im Gegensatz dazu sind die Abbildungen der Doppelseite detailgetreu wiedergegeben, so dass jene eindeutig als Proposition 8 bzw. 9 aus Buch XIII zu identifizieren ist (s. Abb. S. 22). Allerdings befindet sich Buch XIII nicht in der Mitte sondern am Ende der Ausgabe von 1482 (vgl. Mackinnon 1993).

Ob diese Abweichung auf inhaltliche oder kompositorische Gründe zurückzuführen ist, bleibt offen. Nichtsdestotrotz drängt sich die Frage auf, ob der Maler eine ursprüngliche Konzeption später abgewandelt hat. Dabei könnten sich die Fehler in der Darstellung von Buch und Hand eingeschlichen haben.
Interessant ist der vermeintliche inhaltliche Bezug zwischen dem aufgeschlagenen Buch und der Zeichentafel, der durch die Handhaltung Luca Paciolis suggeriert wird. Der direkte Vergleich zeigt jedoch, dass sich die Tafelzeichnung und die Zeichnung zu Proposition 8 im Einzelnen deutlich unterscheiden.[4]

3 Interessant ist in diesem Zusammenhang die Darstellung David Hockneys, der zu mit Piero della Francescas Geißelung Christi (um 1460) sagt: »Die Bewegungen der Arme, die Geste der Hände erfolgen bei ihm gemäß seinen Kenntnissen von Geometrie und Perspektive. Er stellt die Figuren so dar, wie er es weiß, nicht wie er sie vor sich sieht.« (Hockney, 2001, S. 125) Dies könnte auch bei den Abweichungen in der Darstellung der Hände Luca Paciolis der Fall sein.
4 In der Literatur wird die Auffassung geteilt, dass keine der Figuren aus Buch XIII 8/9 der Tafelzeichnung entsprechen. Allerdings gibt es Darstellungen, die einen inhaltlichen Bezug der Tafelzeichnung zu einer anderen Textstelle herstellen; so wird einmal Buch XIII. 12 (Davis), das andere Mal Buch XIV 2 (Mackinnon) angegeben.



Die Bildmontage erläutert den Versuchsaufbau. Im Abstand der Betrachtungsdistanz von 4,76 m beobachtet ein Zuschauer die Staffage (hier ohne den hängenden Glaskörper). Die Sehstrahlen treffen mit den über einen Spiegel umgelenkten Projektionsstrahlen genau aufeinander. Die mit geometrischer Methode entschlüsselte Inszenierung des Gemäldes stimmt mit der Konstruktion der Staffage überein. Der halbdurchlässige Spiegel ermöglicht es dem Betrachter die Projektion auf die Staffage exakt aus dem Projektionszentrum (Augpunkt) zu sehen.

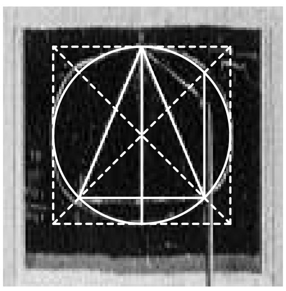

LIBER

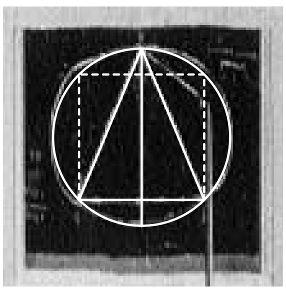
XIII

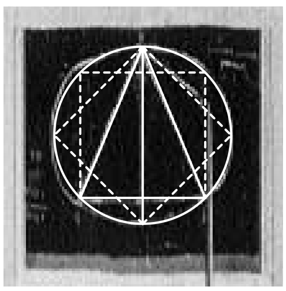
Doppelseite aus dem Buch XIII der Elemente Euklids in der Ausgabe von 1482 – jener Ausgabe, die im Gemälde dargestellt ist

Die Zeichentafel

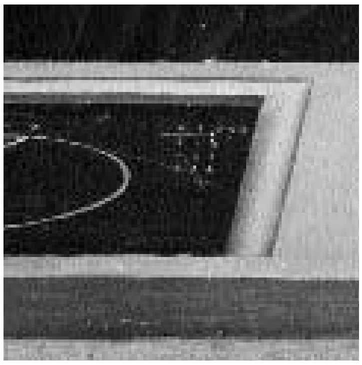
Nach der Entzerrung der Perspektive über die elektronische Bildbearbeitung kann man feststellen, dass für eine Interpretation der an Euklid orientierten Kreidezeichnung auf der Tafel entgegen den in der Literatur verbreiteten zahlreichen Alternativen nur eine Möglichkeit verbleibt. Es handelt sich nämlich bei der in den Kreis einbeschriebenen Figur um ein gleichschenkliges, sehr spitzwinkliges Dreieck. Zwei Eckpunkte der Dreiecksbasis liegen auf den Eckpunkten eines fiktiven, in den Kreis einbeschriebenen Quadrats. Legt man ein zweites um 45° gedrehtes Quadrat über die Zeichnung, so kommt dieses genau mit der Linie zur Deckung, die von der Dreiecksspitze ausgeht und am Zeigestab des Lehrers endet.

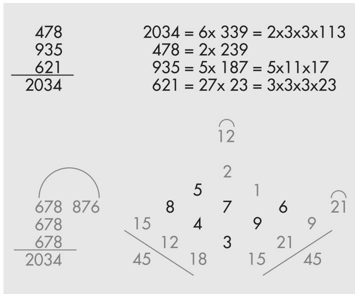






Z a h l e n s p i e l e

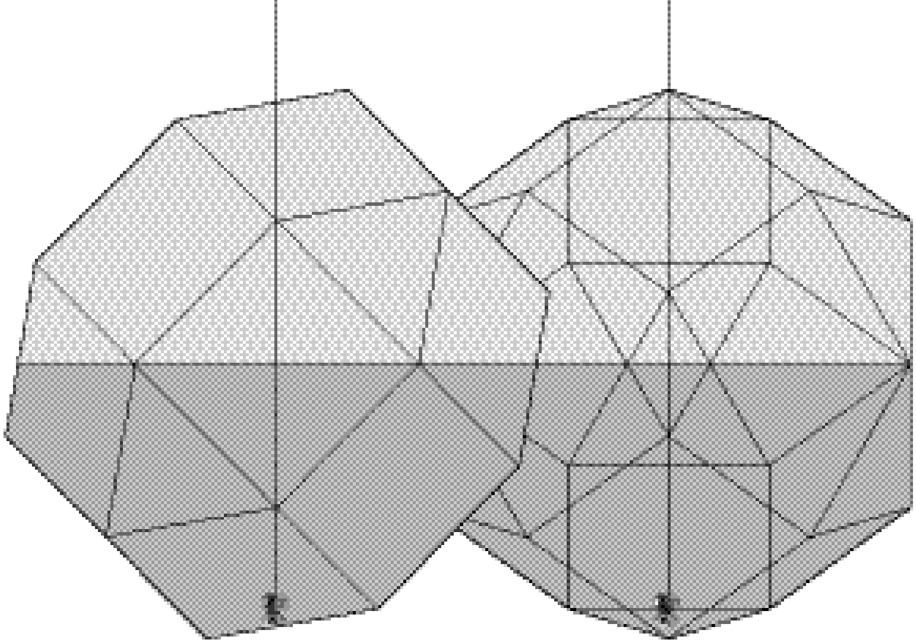


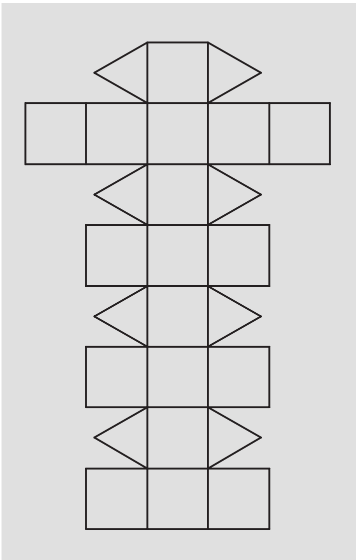


Auf der Tafel am rechten Rand unten erkennt man eine schematische Darstellung der Ziffern 1, …, 9 als Summe dreier dreistelliger Zahlen mit der Gesamtsumme 2034. Daneben sind in einem auf der Spitze stehenden Quadratschema die Ziffern 3, …, 9 abgebildet (die Ziffern 1 und 2 sind nicht erkennbar). Durch eine Besetzung der beiden fehlenden Einträge mit diesen Ziffern kann ein sinnvoller Zusammenhang zwischen diesen Ziffernanordnungen hergestellt werden. Dr. Erhard Cramer, Universitätsprofessor für Mathematik an der RWTH Aachen, regte diese Ergänzung an, und begründete sie mit folgender Darstellung:
»Vorne links auf der Zeichentafel finden wir die Addition der Zahlen 478, 935 und 621 mit dem Ergebnis 2034, wobei zunächst auffällt, dass die zu addierenden Zahlen aus den Ziffern 1, …, 9 zusammengestellt sind und die 3 im Zentrum des Zahlenblocks steht. In der zweiten Zahlengruppe oben rechts finden wir ein weiteres Zahlenschema in Gestalt eines auf einer Ecke stehenden Quadrates, wobei die Ecke, auf der das Quadrat steht, mit der Ziffer 3 besetzt ist. Das Schema besteht nach der bereits erwähnten Ergänzung der Ziffern 1 und 2 ebenfalls aus 1, …, 9. Besetzt man den oben stehenden, fehlenden Eintrag mit der 2 und den rechts darunter stehenden Platz mit der 1, so sind zunächst alle Zeilensummen durch 3 teilbar. Die Summe der vertikalen Reihe ist 12, die der horizontalen 21. Beide bestehen aus den fehlenden Ziffern, sind ebenfalls durch 3 teilbar und haben zudem die Quersumme 3. Die Gesamtsumme aller Ziffern ist 45 mit Quersumme $9 = 3^2$. Das Zahlenquadrat scheint somit einer gewissen Gesetzmäßigkeit zu unterliegen. Es basiert in dem ausgeführten Sinn auf der Ziffer 3 und ist damit gegenüber einer beliebigen Anordnung der Ziffern 1, …, 9 ausgezeichnet. Eine zufällige Darstellung scheint unwahrscheinlich, die Präsentation bewusst gewählt worden zu sein. Eine weitere Beobachtung unterstreicht diese Interpretation. Die horizontale Reihe des rechten Zahlenschemas wird aus den Ziffern 8-7-6 gebildet. Spiegelt man 876 zu 678 und multipliziert diese Zahl mit 3, resultiert wiederum das Ergebnis 2034, womit der Bezug zum linken Quadrat hergestellt wird. Deren Quersumme ist übrigens $9 = 3^2$.«

Von den weiteren Gegenständen auf dem Tisch wurden im Rahmen dieses Forschungsberichtes gegenüber den in der Literatur verbreiteten Interpretationen keine nennenswert neuen Erkenntnisse gewonnen. Hinsichtlich eines Objektes verbleibt Ungewissheit gegenüber landläufigen Kommentaren. Das vermutlich aus Sicherheitsgründen gegen ein mögliches Umkippen vor der Tischkante hängende Tintenfass, kann kaum von einer kleinen, leichten, noch dazu zylindrischen Zirkelschatulle als adäquates Gegengewicht gehalten werden, wie man gelegentlich vermutet.[5] Geht man davon aus, dass dieses Detail kein Phantasieobjekt des Malers ist, so muss die dunkle Schatulle, wenn schon im Querschnitt ungünstig rund gestaltet, mindestens eine dicke Bleiwandung haben, um als Gegengewicht zuverlässig wirken zu können. Eine weitere Beobachtung zu diesem Thema mag noch angefügt werden. Zylindrische oder auch ovale Zirkeletuis sind in der Regel quer zu ihrer Längsachse geteilt. Der gemalte Zylinder weist eine Fuge in Längsrichtung auf. Eine weitere Untersuchung der vorstehenden Frage wäre sicher nicht ohne Reiz, ist aber für eine Gesamtschau von untergeordneter Bedeutung. Anders verhält es sich hier mit dem letzten Objekt, das noch verbleibt und das für die Bildinterpretation von großer Bedeutung ist. Es wird daher in einem eigenen Kapitel näher untersucht. Es handelt sich um den hängenden Glaskörper auf der linken Seite des Bildes.

5 Hubertus Günther, The Renaissance of Antiquity, in: The Renaissance from Brunelleschi to Michelangelo, 1994, p. 265

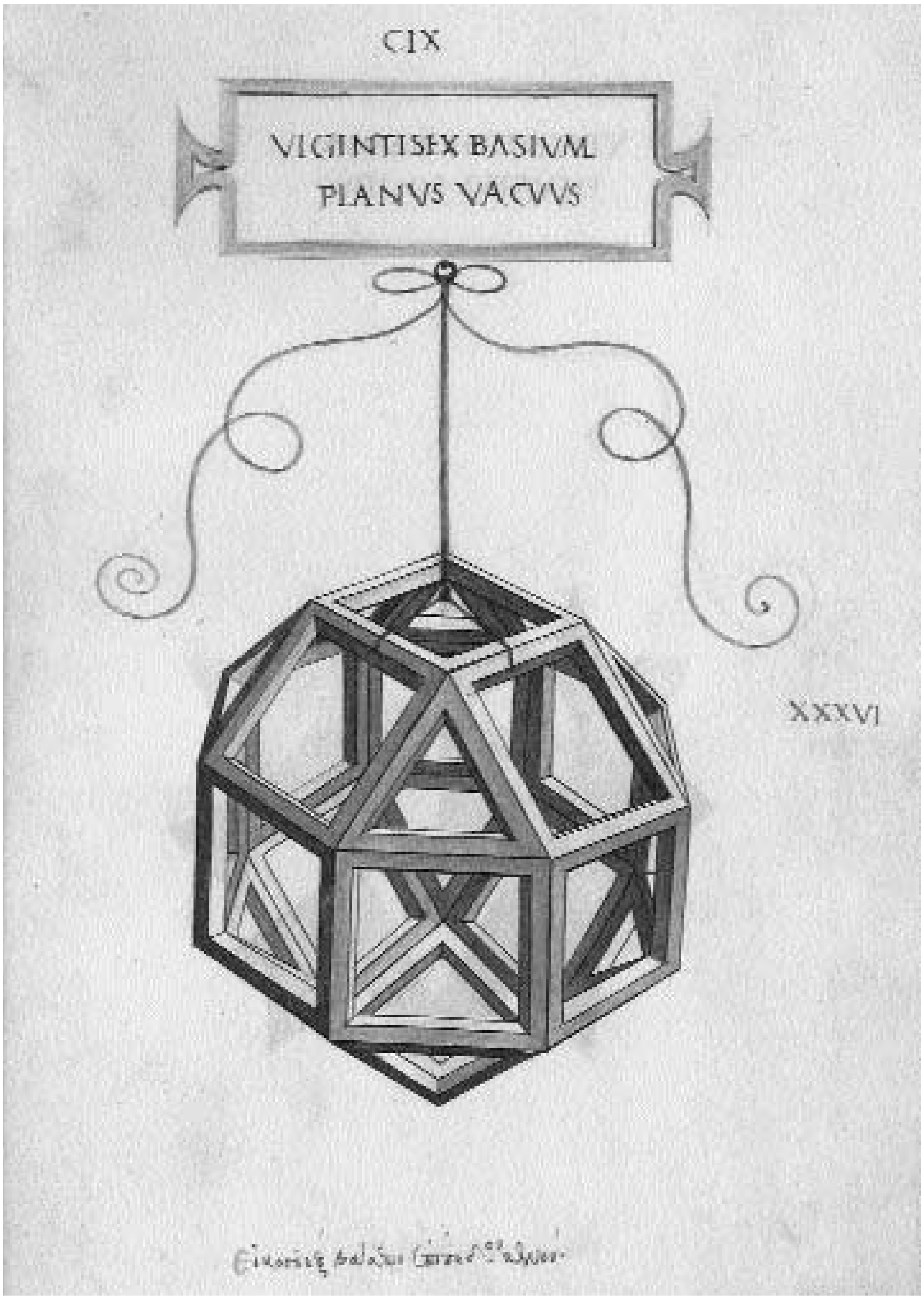


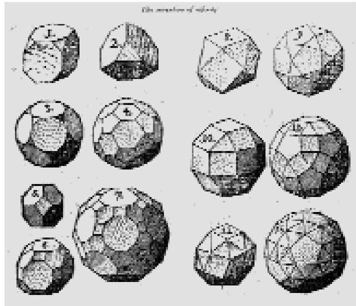


Die Abwicklung des Rhombenkuboktaeders nach einer Zeichnung aus dem Viertbüchlein von Albrecht Dürer

Der Rhombenkuboktaeder

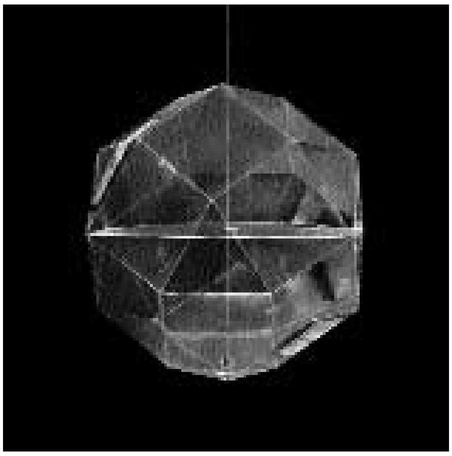
Der zur Hälfte mit Wasser gefüllte Glaskörper hängt an einem Faden auf der linken Seite des Bildes. Er gehört zur Gruppe der Archimedischen Polyeder.[6] Der so genannte Rhombenkuboktaeder hat 26 Flächen. Er verfügt über 24 vierkantige Ecken und 48 Kanten. Um jede seiner Ecken gruppieren sich je drei quadratische Flächen und eine gleichseitige Dreiecksfläche. Die Flächen des Glaskörpers scheinen geschlossen zu sein, so dass man sich fragt, wie das Wasser in den Körper gelangt ist. Die Lichtreflexe an den schmalen Körperkanten und an der Wasseroberfläche lassen den Glaskörper plastisch und zugleich fragil erscheinen. An den Körperkanten ist keine Materialstärke zu erkennen. Betrachtet man die grüne, horizontal verlaufende Spiegelung in der Mitte der quadratischen, nach vorne unten geneigten Körperfläche, so ist verwunderlich, dass diese hinter dem roten Faden liegt.
Die räumliche Lage des Körpers ist nicht unmittelbar ersichtlich. Fest steht, dass der Körper an einem Faden hängt, der mit einem Glastropfen im Inneren der Körpers verbunden ist. Der Glastropfen scheint sich auf einer horizontalen Ebene zu befinden, die ebenso wie der Glastropfen selbst aus einem Blickwinkel von schräg oben dargestellt ist. Die exakte Definition seiner räumlichen Lage ist durch den horizontalen Wasserspiegel gegeben. Dieser verläuft diagonal durch die beiden seitlichen, einander gegenüberliegenden, quadratischen Körperflächen und damit durch vier Ecken des Glaskörpers. Die Position des Glastropfens im Innern des Körpers ist damit ebenso definiert, wie die Austrittstelle des Fadens an der Körperoberseite. Beide Punkte liegen jeweils auf den Höhen zweier einander gegenüberliegender und um 180 Grad gegeneinander verdrehter Dreiecksflächen. Sie teilen deren Höhen jeweils in einem Verhältnis von $1:\sqrt{2}$. Weil nun der Anschluss des Glastropfens auf der unteren Dreiecksfläche liegt, müsste dieser in der dargestellten Untersicht als Ellipse erscheinen. Dies ist jedoch nicht der Fall.
Nichtsdestotrotz ist die besondere Lage des Körpers bemerkenswert, denn sie weicht deutlich von den üblichen Darstellungen ab, wie man sie zum Beispiel bei Wilhelm Schickard[6] und Leonardo da Vinci[7] findet. Dort ist jeweils die nach unten ausgerichtete quadratische Körperfläche parallel zur Horizontalebene ausgerichtet, so dass der Körper auch auf einem Tisch stehen könnte. Im Gegensatz dazu kann der Rhombenkuboktaeder de Barbaris in seiner Lage nur hängen, denn die nach unten ausgerichtete dreieckige Polyederfläche verläuft schräg zur Horizontalebene.





6 Archimedische Körper sind aus je zwei oder drei verschiedenen regulären Vielecken mit regulärer Kantenlänge und homogenen Ecken aufgebaut und gelten daher als halbregelmäßige Körper. Ihre Entdeckung wird Archimedes zugeschrieben, obgleich sein Werk nicht erhalten ist. Erst 1619 werden die halbregulären Polyeder durch Keppler vollständig zusammengestellt und im zweiten Buch der »Harmonices Mundi« herausgegeben. Das Polyeder hat die Netzbezeichnung 3.4.4.4.
Die Zeichungen in Keplers »Five books of the harmony of the world«, 1619, Book 2, Proposition 28 stammen vom Tübinger Mathematikprofessors Wilhelm Schickard (1592–1625). Die Archimedischen Körper sind als Isometrien wiedergegeben. Sie sind anschaulich und gut verständlich aber geometrisch unpräzise.

7 Leonardo da Vincis Rhombenkuboktaeder in Luca Paciolis De Divina Proportionae ist eine perspektivische Darstellung. Sie ist jedoch nicht geometrisch konstruiert, was u.a. an der nach oben verzerrten hinteren Ecke der quadratischen Körperunterseite zu sehen ist.



Material: Acrylglas, Materialstärke: 3 mm, Seitenlänge: 90,5 mm, Volumen: 5902 g zzgl. Glaswandung, Gewicht mit Wasser: 2951 g, Gewicht ohne Wasser: 584 g incl. Faden

Ein auffälliger Unterschied zu den Darstellungen da Vincis und Schickards ist die große geometrische Genauigkeit bei de Barbaris perspektivischem Rhombenkuboktaeder.
Zur genaueren Untersuchung wird der Körper auf Basis der bisherigen Feststellungen aus Acrylglastafeln hergestellt. Die quadratischen und gleichseitig dreieckigen Flächen sind mit Gehrungen versehen und miteinander verklebt. Der rote Faden verläuft durch Bohrungen in der oberen und unteren Dreiecksfläche. Er ist an der Unterseite durch einen Knoten gesichert. Vor dem Einsetzen der letzten Acrylglastafel wird der Körper zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Um der Darstellung des gemalten Körpers zu entsprechen wird der Acrylglaskörper aus dem aus der Bildgeometrie ermittelten Augpunkt mit einer Distanz von 4,76 m fotografiert.
Vergleicht man die beiden Abbildungen sticht zunächst der geometrisch exakt wiedergegebene Kantenverlauf des gemalten Körpers ins Auge. Die Darstellung der Lichtbrechung unterscheidet sich dagegen deutlich von der des Acrylglaskörpers. So ist die Materialstärke des Acrylglaskörpers im unteren Bereich der Körperrückseite im Gegensatz zum gemalten Körper deutlich sichtbar. Noch entscheidender ist aber das ebenfalls durch die Lichtbrechung hervorgerufene Phänomen der optischen Verzerrung. Dieses tritt verstärkt an den hinteren, unterhalb der Wasseroberfläche liegenden Kanten des Acrylkörpers auf. Die nach unten gerichtete Spitze der hinteren Dreiecksfläche ist so in den verschiedenen Körperflächen insgesamt fünf Mal zu sehen. Auch der rote Faden des Acrylkörpers erscheint unterhalb der Wasserkante nach links versetzt.
Im direkten Vergleich hat man so den Eindruck als sei der gemalte Körper wasserleer. Interessant ist, dass dies bei isolierter Betrachtung des Gemäldes nicht weiter auffällt. Offenbar lassen uns allein die Lichtreflexe im Innern des Körpers eine Wasseroberfläche erkennen.

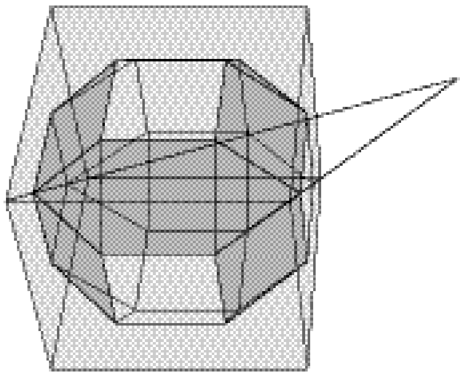
Abbildung oder Konstruktion

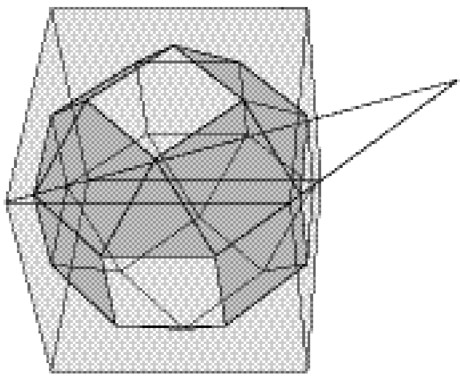
Auf die Frage, wie nun der Maler einen derart exakten Körper darstellen kann, gibt es verschiedene Erklärungsansätze. David Hockney beschreibt ein Verfahren mit einem Hohlspiegel, das um 1430 in Flandern auftaucht und die Malerei revolutioniert. Dieses Verfahren könnte um 1480 mit dem Portinari-Altar von Hugo van der Goes nach Florenz gelangt sein (vergl. Hockney, 2001). Um 1500 finden sich in den Aufzeichnungen Leonardo da Vincis Notizen zur Camera obscura. Doch beide Verfahren können bei de Barbaris Bild keine Anwendung gefunden haben, denn die Distanz vom Augpunkt zur Bildebene ist viel zu groß. Weder das eine noch das andere Verfahren ist lichtstark genug, um bei einer derart großen Distanz von 4,76 m noch ein nachzeichenbares Abbild zu liefern. Außerdem wären im Falle der Verwendung eines entsprechenden Verfahrens sowohl die Hände Paciolis als auch das aufgeschlagene Buch naturgetreu dargestellt worden.

Eine mögliche Erklärung ist, dass für die geometrischen Objekte ein Verfahren zur Anwendung kam, das in dem berühmten Stich Albrecht Dürers »Der Zeichner der Laute« von 1525 illustriert wird.[8]

8 Das Verfahren wird in einem gesonderten Beitrag am Ende dieses Heftes genauer beschrieben.

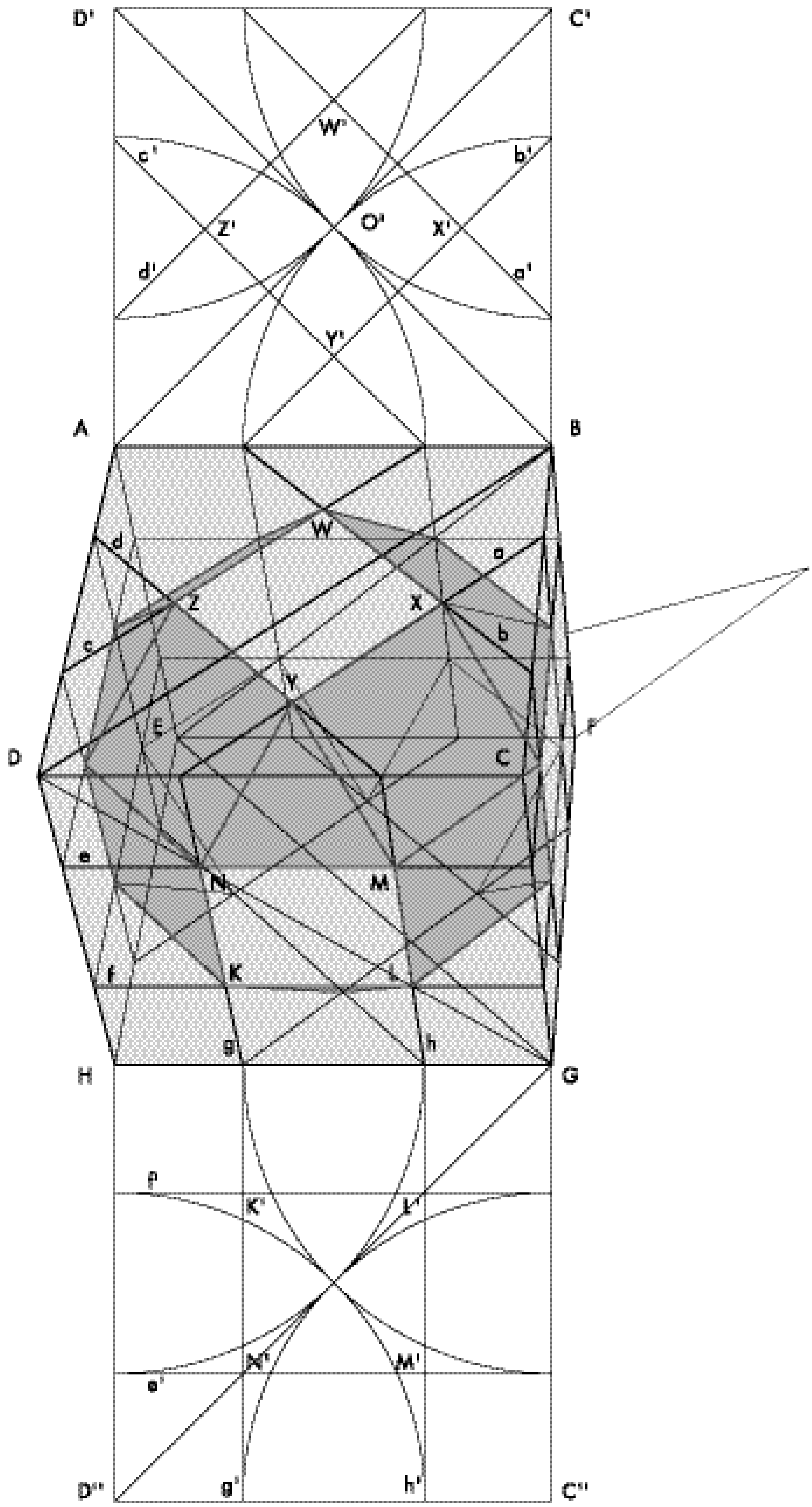
Um einen Geometrischen Körper exakt wiedergeben zu können genügt es, dessen Eckpunkte zu konstruieren. Als Vorlage könnte ein Holzmodell gedient haben, wie es in der Zeichnung Leonardo da Vincis festgehalten ist. Ein solches Modell hätte den Vorteil, dass auch die Ecken auf der Körperrückseite exakt abgenommen werden können. Allerdings lässt sich damit die außergewöhnliche Lage des Glaskörpers noch nicht erklären.
Die Feststellungen, dass nicht ersichtlich ist, wie das Wasser in den Glaskörper gelangt, dass nicht nachvollziehbar ist, weshalb seine Materialstärke ebenso wenig dargestellt ist, wie die Lichtbrechungen unterhalb der Wasseroberfläche, dass die Frage besteht, warum die Spiegelung des grünen Tisches hinter und nicht vor dem roten Faden liegt und dass die Darstellung des Glastropfens geometrisch falsch ist, lassen nur eine Schlussfolgerung zu:
Der Glaskörper hat so nie existiert. Er war weder aus Glas noch mit Wasser gefüllt. Wie bereits oben erwähnt ist es durchaus möglich, den Körper anhand eines Holzmodells mit der beschriebenen Methode Albrecht Dürers abzutragen. Allerdings ist damit noch nicht seine außergewöhnliche Lage im Raum erklärt. Erst eine letzte Untersuchung gibt darüber Aufschluss:
Der Rhombenkuboktaeder lässt sich auf zweierlei Weise in einen Würfel einbeschreiben. In beiden Fällen liegt je eine quadratische Fläche des archimedischen Körpers in einer Fläche des Würfels. Mit dem Unterschied, dass bei der ersten Möglichkeit alle Kanten der in den Würfelflächen liegenden quadratischen Polyederflächen parallel zu den Würfelkanten verlaufen, während bei der zweiten Möglichkeit nur vier Kanten der entsprechenden Flächen parallel und zwei um 45 Grad gegen die Würfelkanten verdreht sind.



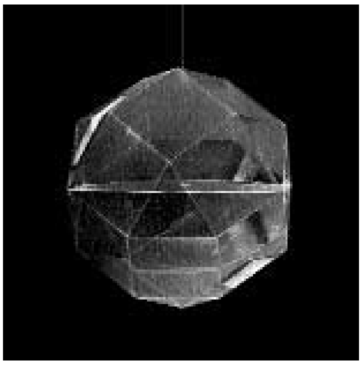


Umschreibt man den Rhombenkuboktaeder im Bild auf die zuletzt erwähnte Weise, so verlaufen vier Würfelkanten parallel zur Bildebene (parallel zum Horizont). Dabei liegen zwei Kanten übereinander, und zwei perspektivisch hintereinander. Dieser Vorgang kann ebenso umgekehrt werden, indem der Rhombenkuboktaeder in einen auf einer Kante stehenden, zur Bildtafel parallelen, perspektivischen Würfel gezeichnet wird. Auf diese Weise ist ein einfaches Polyeder in vermeintlich komplexer Lage auch ohne das Wissen um konstruierte Perspektive sehr genau zu zeichnen.

Geometrische Konstruktion:
Zunächst wird ein auf einer Kante planparallel zur Bildtafel stehender, perspektivischer Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H gezeichnet. Über der Kante $\overline{AB}$ wird ein Quadrat ABC′D′ errichtet, dessen Diagonalen sich im Punkt O′ schneiden. Um die Eckpunkte A, B, C′ und D′ werden Kreise mit dem Radius $\overline{AO'}$ geschlagen. Diese schneiden die Quadratseiten in jeweils zwei Punkten, durch die die Geraden a′,b′,c′ und d′ verlaufen. Die Geraden umschreiben das Quadrat W′X′Y′Z′ in der Mitte der umgeklappten Würfelseite. Das Quadrat ABC′D′ wird mit W′, X′ ,Y′ und Z′ in die Würfelseitenebene zurückgeklappt. Man erhält so die vier Punkte W, X, Y und Z des Rhombenkuboktaeders. In einem entsprechenden Vorgang wird das Quadrat HGC″D″ über der Würfelkante $\overline{HG}$ errichtet und das von den Geraden e′, f′, g′ und h′ begrenzte Quadrat K′L′M′N′ konstruiert. Durch die Übertragung der Geraden e′, f′, g′ und h′ in die Würfelebene ergeben sich die Polyederpunkte K, L, M und N. Die Geraden a, b, c und d bzw. e, f, g und h werden auf die übrigen Würfelseiten übertragen. Mithilfe der Diagonalen in den jeweiligen Würfelflächen erhält man die noch fehlenden Eckpunkte des Rhombenkuboktaeders.



Der Maler muss die Lage des Körpers im umschreibenden Würfel gekannt haben. Er war mit den Mitteln der euklidschen Geometrie vertraut. Folglich ist es durchaus denkbar, dass er den Rhombenkuboktaeder mithilfe einer Konstruktion in den umschriebenden Würfel hineingezeichnet hat.
Offen bleibt die Frage, weshalb der Maler das Polyeder an der unteren Dreiecksfläche und nicht oben aufgehängt hat. Vielleicht hat ihn sein Empfinden für statische Zusammenhänge dazu bewogen. Mit der nebenstehenden Retusche kann der Leser selbst überprüfen, was mit dem zerbrechlichen Glaskörper passiert, wenn der rote Faden ausgeblendet wird. Das Polyeder verliert seine Körperhaftigkeit, wirkt flächig und unwirklich.



Literatur

Adam, Paul und Wyss, Arnold: Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und Polaren Gebilde, Bern 1984

Dürer, Albrecht: Vier Bücher von menschlicher Proportion, Nürnberg 1528

Davis, Margaret Daly: Piero della Francesca's Mathematical Treatises, Ravenna 1977

Euklid: Die Elemente, übersetzt von Clemens Thaer, Thun / Frankfurt a. M. 2000

Field, Judith Veronica: The invention of infinity, Oxford 1997

Evers, B.: Architekturmodelle der Renaissance, München 1995

Günther, Hubertus: The Renaissance of Antiquity, in: The Renaissance from Brunelleschi to Michelangelo, 1994

Hockney, David: Geheimes Wissen, München 2001

Kürpig, Friedhelm und Niewiadomski, Oliver: Grundlehre Geometrie, Braunschweig / Wiesbaden 1992

Lauenstein, Hajo: Arithmetik und Geometrie in Raffaels Schule von Athen, Frankfurt 1998

Mackinnon, Nick: The portrait of Fra Luca Pacioli, Mathematical Gazette, Juli 1993

March, Lional: Architectonics of Humanism, London 1998

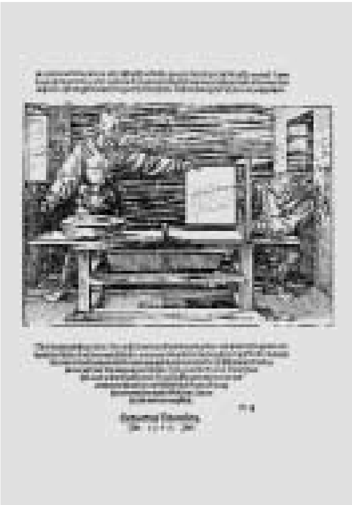
Mothe, Oscar: Illustrirtes Baulexikon 3. Bd., Berlin 1876

Nagel, Marc: Theoretische Diplomarbeit, HfbK, Hamburg 1992

Schuritz, Hans: Die Perspektive in der Kunst Albrecht Dürers, Frankfurt a. M. 1919

Veltman, Kim H. und Keeke, Kenneth D.: Studies on Leonardo da Vinci, Linear Perspective and the Visual Dimension of Science and Art, Deutscher Kunstverlag, München 1986

NOCH EIN ANDRE MEYNUNG



1 Albrecht Dürer, Das Viertbüchlein, in: Underweysung der messung, mit dem zirckel un richtscheyt, in Linien ebenen unnd gantzen corporen, durch Albrecht Dürer zusamen gezogen, und zu nutz allen kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren, in truck gebracht im jar MDXXV

Durch drey feden, so Albrecht Dürer, kann der Künstler ein *yetlich ding erzeichnen* und *in ein gemel bringen*.

Diese *andre meynung*, wir würden heute Methode sagen, beschreibt Albrecht Dürer 1525 in einer der zehn Textabbildungen des Viertbüchleins.[1] Den Künstler direkt anredend geben die Darstellung »Der Zeichner der Laute« und der Text genaue Anweisungen, wie der Meister dabei zu verfahren hat.

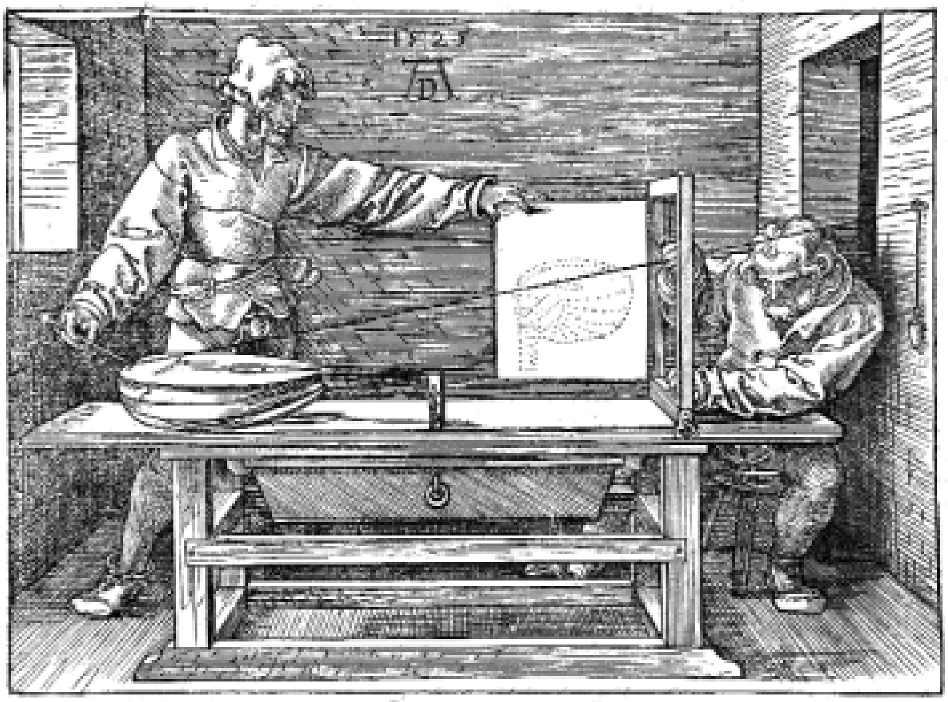
Der Aufbau ist recht einfach. In einen Saal wird eine Nadel mit einem weiten Öhr, durch das ein starker Faden gezogen werden kann, in die Wand geschlagen. *Und setz das für ein aug* meint, dass dieser Punkt den Augpunkt des Betrachters darstellen wird. An dem Faden wird ein *plei gewicht gehenckt* und durch das Öhr gezogen. Danach wird der Meister angewiesen, einen Tisch soweit entfernt von dem Nadelöhr zu positionieren, wie er will. Auf diesen Tisch soll nun ein *aufrechte ram*, einen Rahmen mit einem Türchen, welches man auf und zu machen kann, gestellt werden. *Dies türlein sey dein tafel darauf du malen wilt* bezeichnet die Bildebene, auf der das Gemälde entstehen wird. Danach soll der Meister zwei weitere Fäden, die so lang sind, wie der Rahmen hoch und breit ist, jeweils mittig an eine Rahmenseite nageln und hängen lassen. Nun braucht er nur noch *ein eisnen langen steft der zuforderst am spitz ein nadel ör hab* an den langen, starken Faden knoten und ihn durch Rahmen hinaus in die Hand seines Gesellen geben. Der Meister selbst ist angehalten, die *anderen zweyer feden die an der ram hangen* zu bedienen. Abschließend: *leg ein lauten oder was dir sunst gefelt so fern von der ram als du wilt* und achte darauf, dass die Laute unverrückt bleibt, solange sie abgezeichnet wird. Der Aufbau ist abgeschlossen. Die Methode zur Erzeugung eines perspektiven Bildes ist aus heutiger Sicht denkbar einfach, aber recht umständlich.

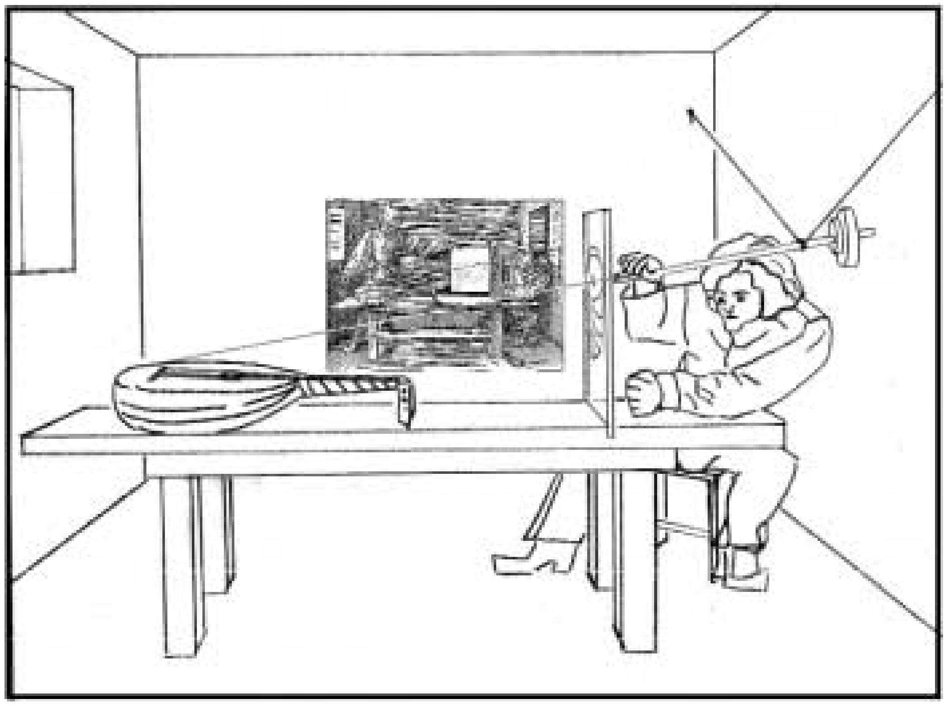
Der Geselle wird aufgefordert, die Nadel mit dem langen Faden, wir würden es heute als den Sehstrahl bezeichnen, durch den geöffneten Rahmen auf die *nöttigsten puncte der lautten* hinauszustrecken. Wenn er stillhält und der lange Faden gespannt ist, dann schlägt der Meister die *zwen feden* an der *ram kreuzweiß gestractes an den langen faden* und klebt deren lose Enden mit einem Wachs an den Rahmen. Der Geselle lässt den langen Faden durchhängen, die Tür mit der Bildtafel wird geschlossen und *den selben puncten da die feden kreuzweiß ober einander* wird auf die Bildtafel gezeichnet. Das Türchen wird wieder geöffnet und ein weiterer Punkt der Laute festgehalten, *piß das (...) die ganzen lauten gar an die tafel punctiert* ist. Alle Punkte werden abschließend mit einer Linie zusammengezogen und so sieht der Meister *was daraus wirt* und mag ein *ander ding auch abzeichnen*.

Ein andre meynung

Durch drey feden magst du ein jetlich ding das du mit erzeychen kanst in ein gemel bringen / Auf ein dafel zuverzeychnen / dem thu also.
Pist du in einem sal so schlag ein grosse nadel mit einem weyten ör die darzu gemacht ist in ein wand / und setz das für ein aug / dardurch zeuch einen starken faden / und henck unden ein pley ge wicht daran / darnach setz einen tisch oder tafel soweit von dem nadelör darinn der faden ist alß du wilt / darauf stell stet ein aufrechte ram zwerchs gegen dem nadelör hoch oder nider auf weliche sey-ten du wilt / die ein türlein hab das man auf und zu müg than / diß thürlein sey dein tafel darauf du malen wilt. Darnach nagel zwen feden die als lang sind als die aufrecht ram lang und preyt ist oben und mitten in die ram / und den anderen auf einer seyten auch mitten in die ram und laß sie hangen. Darnach mach ein eisnen langen steft der zu forderst am spitz ein nadel ör hab / dareyn feden den lan gen faden der durch das nadel ör an der wand gezogen ist / und far mit der nadel unnd langen faden durch die ram hinauß / und gib sie einem anderen in die hand / und wart du der anderen zweyer feden die an der ram hangen. Nun brauch diß also / leg ein lauten oder was dir sunst gefelt so fern von der ram als du wilt / und das sie unverruckt peleyb so lang du ir bedarfst / und laß deinen gesellen die nadel mit dem faden hinauß strecken / auf die nöttigsten puncte der lautten / und so oft er auf einem still helt unnd den langen faden anstreckt / so schlag alweg die zwen feden an der ram kreuzweiß gestrackes an den langen faden / und kleb sie zu peden orten mit einem wachs an die ram / und heyß deinen gesel len seinen langen faden nachlassen. Darnach schlag die türlein zu unnd zeychen den selben puncten da die feden kreutzweyß uber einander gen auf die tafel / darnach thu das türlein wider auf und thu mit einem anderen puncten aber also piß das du die gantzen lauten gar an die tafel punctierst / dann zeuch all puncten die auf der tafel von der lauten worden find mit linien zusamen / so siehst du was dar-auß wirt / also magst du ein ander ding auch abzeychnen. Dise meynung hab ich hernach aufgerissen. Und damit günstiger lieber herr will ich mein schreiben end geben / und so mir Got genad verleycht die bücher so ich von menschlicher proporcion und anderen darzu gehörend geschryben hab mit der zeyt in druck pringen / und darpey meniglich gewarnet haben / ob sich jemand under steen wurd mir diß außgangen büchlein wider nach zu drucken / das ich das selb auch wider drucken will / und auß lassen geen mit meren und grösserem zusatz dann ietz beschehen / darnach mag sich ein jetlicher richten / Got dem Herren sey lob und eer ewigklich.

Gedruckt zu Nüremberg.
Im. 1525. Jar.





Durch einen Lichtstrahl, erzeugt von einem Laserpointer, kann man nun gleichwohl ein jegliches Ding zeichnen und das ohne einen Gesellen zur Hilfe.
In einem zu Albrecht Dürers Aufriss symmetrischen Aufbau wird der lange Faden durch ein leichtes, konisch geformtes Polyesterrohr ersetzt. Es ist flexibel im Augpunkt gelagert. An der vorderen Spitze befinden sich übereinander angeordnet ein Laserpointer und ein Zeichenstift. Das hintere Ende ist als Gegengewicht mit Blei gefüllt. So befindet sich das Zeichengerät zur besseren Handhabung im Gleichgewicht, obwohl der Dreh- bzw. der Augpunkt weit hinter dem Zeichner liegt. Dürers *aufrechte ram* wird durch eine Glasscheibe ersetzt.
Das Abtasten der wesentlichen Linien der Laute geschieht mit dem Lichtstrahl durch das Entlangfahren am Objekt selbst. Simultan zum Abtasten der Laute zeichnet der Zeichenstift auf der Glasscheibe das perspektive Bild.

So ist es nun möglich, Teile oder ein ganzes Gemälde zu skizzieren. Höhe des Augpunktes, Entfernung des Augpunktes von der Bildtafel, die Größe der Bildtafel und zuletzt die Lage des zu zeichnende Objektes zur Bildtafel sind die das Zeichenergebnis bestimmenden Parameter. Dürer macht diese Einflussgrößen in diesem Text nicht zum Thema. Er sagt dazu: Stelle den Tisch oder lege die Laute soweit entfernt von dem Augpunkt oder der Bildtafel *als du wilt* und übergeht so die Rede über die Wirkung, d. h. über unterschiedliche Zeichenergebnisse bei Wahl anderer Entfernungen. Er beschreibt dem Künstler hier ausschließlich den Gebrauch, die Anwendung seiner Zeichenmaschine zur Produktion von Kunstwerken.

Zu Dürers Zeiten hatte das deutsche Wort »Kunst« zwei verschiedene Bedeutungen.[2] Einerseits bezeichnet es das Können, also die durch Übung erworbene Fähigkeit des Menschen etwas Bestimmtes hervorzubringen, während es andererseits das Kennen, also das theoretische Wissen, die Kenntnis bzw. die Einsicht in theoretische Zusammenhänge meint. Dass die Hervorbringung von Kunst in dem weiteren Sinn nicht ohne Kenntnis der »Kunst« in dem engeren, wissenschaftlichen Sinn von statten gehen kann, ist nicht erst seit der Renaissance bekannt.
Aus dem Mittelalter sind viele Traktate über Methoden der Zeichen- und Baukunst und der Geometrie überliefert. Aber es brauchte Leon Baptista Alberti, Piero della Francesca, Francesco di Giorgio Martini und Leonardo da Vinci, die mit ihren Schriften die überlieferten Codices von Regeln in eine allgemeine Wissenschaft, in eine Theorie überführten. Durch die Neuinterpretation der alten und vor allem der neu entdeckten antiken Texte verändert sich die Auffassung von dem, was die Künste zu leisten haben, und damit verändert sich auch der Blick auf die wirkliche Welt. Aus den antiken Texten entnehmen sie den Gedanken der Mimesis, der Nachahmung der Natur. Davon lassen sie sich leiten und führen die Kunst zur Naturwahrheit zurück.

Obwohl Dürer, auch ohne die Geometrie als Wissenschaft zu beherrschen, in der Lage war, perspektive Bilder herzustellen, drängte es ihn 1506 ein zweites Mal nach Italien zu reisen und sich in Bologna in dieser Wissenschaft unterrichten zu lassen. Nach seiner Italienreise sind Dürer die Inhalte der italienischen Schriften und die Einblicke und Erfahrungen seiner Kollegen bekannt. Er kennt Brunelleschis »costruzione legittima«, die Konstruktion von Schlagschatten und die auf dem Menschen angewandte Parallelprojektion.
Er fügt diese erworbenen Kenntnisse in dem »Viertbüchlein«, dem vierten Buch der »Unterweisung in der Kunst des Messens« zusammen. Neben den von seinen italienischen Vorgängern entwickelten geometrischen Methoden stellt Dürer die o.g. eigene technische Erfindung vor, die Apparatur »Der Zeichner der Laute«.[3] Hier kommt die wissenschaftliche Kenntnis der perspektivischen Verhältnisse und der dringende Wunsch Dürers, von seinen jungen Künstlerkollegen verstanden zu werden, zusammen. »Der Zeichner der Laute« illustriert sehr anschaulich, wie der Künstler auch ohne ein tieferes Verständnis der geometrischen Zusammenhänge in der Lage ist, bei ungefährer perspektivischer Genauigkeit direkt nach der Natur zu zeichnen.

Nach der Natur zu zeichnen ist für den Renaissance-Künstler oberstes Ziel. Die Künstler stellen sich den Natur-Dingen mit einem wissenschaftlichen Blick beobachtend gegenüber. Die beginnende Neuzeit sieht in den Naturgegenständen nicht mehr ausschließlich die Schöpfung Gottes. Voraussetzungen für diese veränderte

Zeichenmaschine AD 1525
Glasfaserverstärktes Polyesterrohr, Durchmesser 6 cm, Länge 350 cm, mit eingesetztem Laserpointer, Faserschreiber, Bleigegengewicht, Glaszeichenplatte 60 x 40 cm im Rahmen, Maximiliane von Dohnányi und Bastian Zimmermann 2005

2 vgl. Erwin Panofsky, The Art and Life of Albrecht Dürer, Princeton, New Jersey 1955, S. 242 ff
3 ibd., S. 253

Haltung kann man in der Verweltlichung der Kirche, in der Unzufriedenheit der Gelehrten mit der kirchlichen Lehre und vor allem aber in der Abkoppelung der Erkenntnis durch den Verstand vom Glauben sehen. Dies geht einher mit der Lockerung des streng durch den Glauben geregelten Lebens der Menschen und der damit verbundenen Aufwertung der individuellen Persönlichkeit.[4]
Neben der verstandesmäßigen Erkenntnis erstarkt das über die Sinne vermittelte Erkenntnisvermögen. Für die Naturerkenntnis ist das Individuum mit seinem sinnlichen Erkenntnisvermögen, dem Gesichtssinn, in den Mittelpunkt gerückt. Das Individuum nimmt hierbei einen festen Standpunkt, den Augpunkt ein, von dem aus auf die Wirklichkeit geblickt wird. Das linearperspektivisch konstruierte Bild beschreibt dann eine objektive »Wahrheit«. Das gilt in sofern, als dass unter der Annahme eines festen Blickpunktes das Bild nach den aus der Optik abgeleiteten geometrischen Regeln die wirklichen Objekte so auf der zweidimensionalen Fläche abbildet, wie die Objekte selber auf der Netzhaut des Betrachters erscheinen würden.[5]

Aus heutiger Sicht ist ein zentralperspektivisch aufgebautes Bild Standard. Wir haben uns so sehr daran gewöhnt, dass wir eine Abweichung davon, als unregelmäßig empfinden. Für die Künstler und die Kunst genießenden Menschen der Renaissance stellt es eine Neuheit dar. War doch im Mittelalter das Gemälde eine durch Linien in Flächen geteilte und mit Farben bemalte materielle Oberfläche. Von Alberti wird das Gemälde als ein durchsichtiges Fenster beschrieben, durch das hindurch der Betrachter in einen Ausschnitt der Wirklichkeit sieht. Der Mensch steht mit seinem Erkenntnisvermögen im Mittelpunkt, das Bild ist ein Querschnitt zwischen Objekt und Auge.

Die moderne Adaption von Dürers »Zeichner der Laute« spart nicht nur den unter heutigen ökonomischen Gesichtspunkten untragbaren Gesellen ein. Sie ermöglicht dem heutigen Künstler auch ganz unmittelbar den Vorgang des Sehens und des Zeichnens, sprich der Abbildung der Wirklichkeit als von einer strikten Voraus-Setzung resultierenden Vorgang zu erfahren.

4 Brigitte Scheer, Einführung in die Philosophische Ästhetik, Darmstadt, 1997, S. 24

5 Samuel Y. Edgerton, Die Entdeckung der Perspektive, München 2002, S. 147

Bildnachweis

Soweit nicht im Text erwähnt:

S. 22 oben - Euklid: Elemente, Venedig 1482, Reproduktion der Ausgabe aus dem V & A Museum London

S. 31 - Dürer, Albrecht: Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt, Das Viertbüchlein, Nürnberg 1525

S. 25 rechts - Field, J. V.: The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance, Oxford 1997, S. 70

S. 25 links - Pacioli, Luca: De Divina Proportionae, Venedig 1509, Reprint Mailand 1982

S. 18 / 19 - Jacopo de Barbari: Fra Luca Pacioli mit einem Schüler, Museo Capo di Monte, Neapel

Titelbild: Glaspolyeder, Ausschnitt aus dem Porträt des Mathematikers Fra Luca Pacioli, fotografiert von Oreste Lanzetta, Museo Capo di Monte, Neapel

Bild Heftrückseite: Glaspolyeder, Material: Acrylglas, Materialstärke: 3 mm, Seitenlänge: 90,5 mm, Volumen: 5902 g zzgl. Glaswandung, Gewicht mit Wasser: 2951 g, Gewicht ohne Wasser: 584 g incl. Faden
Design Dominik Lutz mit Michel Dachselt

Alle sonstigen Zeichnungen, Bildmontagen und Fotografien: Archive Grundlagen ID der Hochschule für Bildende Künste oder Archiv LR

ISBN 3-935749-69-4